Давидович Б. М., Пушкарь П. Е.,
Чеканов Ю. В.

Математический анализ в 57-й школе

Четырехгодичный курс

Москва
Издательство МЦНМО
2008

ББК 74.262.21
Д13

Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В.
Д13 Математический анализ в 57-й школе. Четырехгодичный курс. — М.: МЦНМО, 2008. — 176 с.
ISBN 978-5-940057-360-9

Книга содержит четырехгодичный курс математического анализа (8—11 кл.), написанный для класса «В» 2005 года выпуска. В ней также излагается методика преподавания математики, разработанная в 57-й школе.

Предназначена для учителей математики, работающих в математических классах, и для всех, кто интересуется работой со школьниками, одаренными в области математики.

ББК 74.262.21

На обложке: здание школы в начале XX века
(фотография из архива семьи К. Мазинга).

ISBN 978-5-940057-360-9

Оглавление

Предисловие

Эта книга предназначена для учителей математики, работающих в математических классах. Мы не считаем, что наш почти сорокалетний опыт работы со школьниками, одаренными в математике, следует копировать. Наши условия достаточно специфичны. Школа расположена в центре Москвы, сложившаяся за много десятилетий известность школы привлекает в нее учеников. Учителя, работающие в школе, — профессионалы высокого уровня. Психологическая атмосфера школы такова, что серьезная учеба престижна для школьников. И тем не менее, нам кажется, что знакомство с основными педагогическими идеями и методами, которые мы разрабатываем и используем в своей практике, может быть интересным для многих учителей математики, работающих с одаренными школьниками.

В математических классах московской 57-й школы традиционно преподается четыре предмета математического цикла. Это алгебра, геометрия, программирование и курс математического анализа. Первые три предмета более или менее стандартны как по содержанию (конечно, с учетом специфики математических классов), так и по форме преподавания.

Что касается курса математического анализа, то это не так. Во-первых, как правило, он пишется преподавателями для вновь набранного математического класса каждый раз заново непосредственно в самом процессе преподавания в этом классе (три или четыре года). Во-вторых, название курса достаточно условно. Конечно, его основой являются начала математического анализа, но во многом он определяется профессиональными вкусами авторов. И в-третьих, этот курс состоит из отдельных заданий (в дальнейшем мы будем называть эти задания листками). Листки делятся на обязательные и дополнительные. Каждый листок, посвященный соответствующей теме курса, содержит основные определения, теоремы, расписанные в виде задач, и набор «прикладных» задач. В процессе обучения школьник решает задачи листка, затем обсуждает свои решения с преподавателем и сдает их ему.

В 1998 году мы опубликовали обязательную часть трехгодичного курса (9—11 кл.) математического анализа, написанного для класса «В»

1993 года выпуска*. Сейчас перед вами четырехгодичный курс (8—11 кл.), написанный для класса «В» 2005 года выпуска. По сути это переработанный и расширенный вариант курса, опубликованного в 1998 году. Он содержит 32 обязательных и 22 дополнительных листка. На изучение курса отводилось 4 часа в неделю. В начале каждого листка указан месяц, когда этот листок раздавался школьникам. Для обязательных листков это происходило тогда, когда предыдущее задание выполнялось почти всеми школьниками. Сопоставив эти данные, читатель увидит временну́ю структуру обязательной части курса. Технология работы с листками подробно описана ниже.

Несколько слов о классе «В» 2005 года выпуска. В 2001 году в 8-й «В» 57-й школы были приняты 22 школьника. В 2005 году 11 «В» закончили 19 ребят. Один школьник после 9-го класса перешел в 10-й общеобразовательный класс 57-й школы, двое в 11-м классе ушли в другие школы. Из 19 выпускников 14 поступили на механико-математический факультет МГУ, двое — в Московский физико-технический институт (один из них — в теоретическую группу ИТЭФа), один — в Высшую школу экономики, один — в МГТУ имени Баумана, один школьник уехал учиться на физико-математическом факультете Карлова университета в г. Праге. Все школьники поступили учиться на бюджетные места.

В заключение отметим, что помимо авторов, указанных на титульном листе, в создании этого курса в той или иной форме принимали участие Н. Верещагин, М. Франк-Каменецкий, А. Шевелев, Б. Бегун, В. Фок, А. Горин, А. Тюрина, Б. Хесин, И. Ященко, Д. Зорин, Д. Фрадкин, Д. Иванов, Н. Некрасов, Д. Фалькович, С. Баранников, Б. Сафронов, Е. Бунина, В. Иванов, А. Иншаков, С. Маркелов, Р. Федоров, А. Ахметшин, П. Тумаркин, Б. Иомдин, И. Изместьев, П. Кожевников, А. Скопенков, О. Карпенков, Е. Фейгин, С. Шадрин, В. Клепцын, Е. Шириков. Все они в разное время были членами нашей команды.

Мы благодарны ведущим учителям математики 57-й школы Л. Д. Альтшулеру и Р. К. Гордину за полезные обсуждения многих тем, связанных с преподаванием в математических классах.

Мы выражаем признательность А. Клименко за большую работу, проделанную при подготовке этой рукописи к печати.

* *Давидович Б. М., Пушкарь П. Е., Чеканов Ю. В.* Математический анализ в математических классах пятьдесят седьмой школы. М.: МЦНМО: ЧеРо, 1998.

Как мы учим (технология педагогического процесса)

Система листков впервые была введена Н. Н. Константиновым в 60-е годы прошлого века в математических классах нескольких московских школ (7-я, 57-я, 91-я, 179-я). Лежащий в основании этой системы метод восходит к Сократу. Он заключается в том, что ученик движется к истине, отвечая на вопросы учителя. При работе по системе листков урок даже внешне выглядит необычно. Нет учителя у доски, нет проверки домашнего задания, объяснения нового материала и т. п. На уроке в классе одновременно присутствуют 5—6 преподавателей математики (мы называем их командой). Все они сидят за партами в разных частях класса и беседуют со своими учениками. За каждым из преподавателей на все время обучения в школе закреплены три-четыре ученика.

Изучение очередного раздела курса начинается с того, что всем ученикам в классе раздается задание (называемое листком) — две-три страницы текста, содержащие набор определений и задач по теме этого раздела. Иногда раздача очередного задания предваряется устным пояснением преподавателя у доски. Получив очередной листок, школьник самостоятельно разбирает определения и решает задачи из листка. Задачи в листке имеют разный характер и разное назначение. Они могут иллюстрировать определения, представлять собой этапы доказательства теорем, развивать навыки обращения с математическими конструкциями — в общем, они помогают обживать соответствующий участок математического мира.

Решив задачу, ученик ее записывает (все это может происходить как дома, так и на уроке). После этого он «сдает» задачу, то есть рассказывает ее решение преподавателю. «Принимая» задачу, преподаватель при необходимости просит прояснить какие-то части доказательства, задает дополнительные вопросы. Зачастую решение требует переделки или доработки, и тогда процесс сдачи задачи может растягиваться на несколько уроков. Факт сдачи задачи фиксируется в специальном журнале, никакие оценки при этом не выставляются.

Отметим, что происходящий на уроке процесс не сводится к приему задач из листка. Преподаватель может также обсуждать другие способы решения тех же задач, возвращаться вместе с учеником к задачам из прошлых листков, связанных с новой темой, формулировать новые определения, задавать новые задачи (и принимать их решения). Одна из важнейших целей при этом — заполнение «пустот» между задачами, создание целостной картины изучаемой области.

Листки, которых за три или четыре года обучения образуется более пятидесяти, подразделяются на обязательные (образующие основной курс) и дополнительные. Задачи в обязательных листках также делятся на обязательные и дополнительные (дополнительные задачи помечены звездочкой). Как правило, обязательные задачи требуется сдавать по порядку; кроме того, иногда предписывается использовать в решении задачи определенный метод. Задачи из очередного обязательного листка могут приниматься лишь тогда, когда предыдущий обязательный листок закрыт, то есть все обязательные задачи из него сданы.

Сроки сдачи листков заранее не устанавливаются, однако раздача нового листка служит ясным сигналом к тому, что предыдущий пора бы закрыть. Для сохранения единства педагогического процесса важно, чтобы никто из школьников класса не отставал или не убегал вперед по основному курсу, чтобы все они, несмотря на их индивидуальные различия, закрывали каждый из листков примерно в одно время. Достигнуть этой цели помогают дополнительные задачи основных листков, устные задачи и дополнительные листки: тем, кто решает задачи быстрее своих одноклассников, всегда есть чем заняться.

Характер дополнительных листков различен. Некоторые из них непосредственно связаны с темами основного курса, другие же составляют важные самостоятельные циклы (такие как «линейная алгебра»). Дополнительные листки отличаются тем, что они выдаются не всем ученикам, а лишь тем, кто выразил желание их взять. При этом школьник, взявший дополнительный листок, не берет на себя обязательства его сдать, получить же этот листок можно в любой момент после того, как он впервые был выдан. Не обязательно брать все дополнительные листки по порядку их нумерации, но определенная зависимость между ними есть. Некоторые задачи в дополнительных листках отмечены звездочкой. Звездочка в этом случае означает, что задача более сложная и решение ее не является абсолютно необходимым для дальнейшего продвижения.

Отметим еще одну важную роль дополнительных листков. Работа с ними в каком-то смысле престижна. Она повышает самооценку ребенка (он не «делает уроки», а «занимается наукой»), благотворно влияет на его неформальный статус в классе. Поэтому, как правило, каждый ученик класса занимается теми или иными дополнительными листками. Но возможности учеников различны, и, составляя курс дополнительных листков, мы это учитываем. Каждый школьник должен иметь возможность выбрать дополнительный листок по своим вкусам, а главное, по своим возможностям.

Оценок за работу по листкам мы не ставим. Отсутствуют конкретные домашние задания к данному уроку. Самостоятельные и контрольные работы даются не очень часто, и не всему классу сразу, а каждому школьнику или группе школьников в то время, когда с точки зрения преподавателя они готовы к ним. Практикуются также домашние контрольные работы.

Суть описанной методики, прежде всего, в индивидуальной работе с каждым учеником. Уровень обсуждения каждой сдаваемой задачи зависит от возможностей школьника и регулируется его преподавателем. Это дает нам возможность в вопросах профессиональной деятельности в одинаковой степени быть немного недовольными каждым школьником. Нет ни первого, ни последнего. Каждый что-то не доделал, и каждый что-то должен своему преподавателю. Это позволяет решать в классе проблему интеллектуального неравенства. В классе создается психологическая атмосфера, способствующая, во-первых, максимальному раскрытию всех способностей, заложенных в школьнике, и, во-вторых, выстраиванию нормальных человеческих взаимоотношений как между школьниками, так и между школьниками и преподавателями.

Заметим, что распределение школьников среди преподавателей — задача не очень простая и не всегда решается с первого раза (необходимо в каком-то смысле относительное совпадение профессиональных уровней, психологическая совместимость ученика и преподавателя и т. п.). Если такое распределение происходит успешно, то отношения между учениками и преподавателями выходят далеко за рамки формальных и имеют долгую послешкольную жизнь. Этому способствует и то, что команда проводит со своим классом много внеурочного времени (туристические походы, экскурсионные поездки в другие города, совместное посещение художественных выставок, кинотеатров, театров и т. п.).

Интересно наблюдать, как ученик профессионально растет вместе со своим преподавателем: школьник становится студентом, преподаватель — аспирантом, студент поступает в аспирантуру, аспирант защищается и т. д. И все это время между ними сохраняются отношения ученик-учитель. Замыкается эта цепочка, когда ученик включается в команду, то есть становится начинающим преподавателем в новом классе.

Такая форма обучения предъявляет как к ученику, так и к преподавателю определенные требования. Школьник должен не только обладать неординарными математическими способностями, не только иметь внутреннюю мотивацию к занятиям математикой, но и вдобавок ко всему он должен быть порядочным человеком. С нашей точки зрения, в противном случае учебный процесс, который все три или четыре года проходит в очень близких и неформальных контактах между преподавателем и учеником, невозможен. Скажем мягче, мы такого школьника учить не умеем.

Хотелось бы отметить влияние занятий математикой как наукой на становление личности школьника. Практически сразу исчезают проблемы, связанные со списыванием (напомним, что все ученики получают одинаковые задания и выполняют их в разные сроки), важным становится не получение хорошей оценки или плюсика (каждая сданная задача отмечается в специальном журнале знаком «плюс»), а самостоятельное решение сложной задачи, поиск научной истины. У школьника формируется чувство собственного достоинства, появляется уважение к самому себе как к начинающему ученому. Развиваются такие качества, как порядочность (и не только научная), интеллигентность. Конечно, помимо математики большую роль здесь играют и общение с замечательными преподавателями 57-й школы, и среда, в которой находится школьник.

После всего сказанного ясно, что задача поиска и отбора детей для обучения в нашем классе очень непроста. Чтобы найти 15—20 школьников, нам приходится в течение учебного года в той или иной форме просматривать несколько тысяч кандидатов. И не всегда бывает легко объяснить родителям, почему мы не берем их ребенка в класс. Хотя, если мы видим, что школьник способный, но ему трудно будет учиться по нашей методике, мы готовы помочь ему поступить в одну из математических школ, которых сейчас достаточно много в Москве.

Что касается команды, то здесь тоже не все так просто. Во-первых, это должна быть группа профессионалов-математиков, единомышленников, одинаково понимающих, зачем, что и как надо преподавать школьникам. Между членами команды могут возникать и возникают споры по поводу оценки той или иной конкретной ситуации. Но в принципиальных, основных вопросах, с нашей точки зрения, этого быть не должно. Иначе все утонет в многочисленных диспутах о смысле бытия. А на дело не останется ни сил, ни времени.

Во-вторых, преподаватели должны обладать довольно редким свойством сохранять во время общения с учеником психологическую обстановку беседы двух коллег. Ибо только в этом случае учебный процесс

эффективен. Если же разговор учителя с учеником, по сути, становится зачетом или экзаменом, или еще одним поводом для самоутверждения начинающего педагога, то от учебного процесса остается лишь одна видимость.

И третье. Если не самый важный, то один из самых важных компонентов описываемой методики. Преподаватель, принимая на уроке у школьника задачу и обсуждая с ним связанные с этой задачей математические проблемы, должен создать такую ситуацию, в которой профессиональные трудности, возникающие перед школьником, несколько превосходят его возможности. (Психологи называют это методом развивающего дискомфорта.) Правильное определение зазора между требованиями, предъявляемыми к ученику, и возможностями школьника сродни искусству. Завышает преподаватель планку — у ученика появляется ощущение безысходности, невозможности решить задачу; занижает — ученику становится скучно, он перестает расти профессионально. В обоих случаях результат одинаков — школьник перестает заниматься математикой. Здесь трудно переоценить ответственность учителя за профессиональную (а следовательно, и за человеческую) судьбу своих учеников.

Еще об одном требовании к преподавателю нужно упомянуть: он должен быть необычайно терпеливым. Понимать, что результат его педагогической деятельности будет не завтра, уметь выслушать ученика до конца, возражать, снова выслушивать, задавать вопросы, получать возражения, отвечать на них и все два часа быть в предельном напряжении. И так два раза в неделю в течение трех-четырех лет. Это тяжелый и практически неоплачиваемый труд.

Такая форма обучения нелегка и для школьников. Ведь нужно быть готовым к каждому уроку (преподаватель приезжает на урок для работы именно с тобой). Особенно тяжело складываются для школьников первые месяцы после начала учебы. Начиная процесс обучения, мы стремимся к тому, чтобы ученики поняли, что такое решение задачи (доказательство). Как правило, большинство из них не имеют сколько-нибудь ясного представления об этом. Поэтому необходимо научить школьника правильному использованию основных логических конструкций. Использовать для этого изучение формальной логики нам кажется нецелесообразным. Вместо этого обучение происходит на конкретном материале методом проб и ошибок: некорректные доказательства отклоняются, а школьнику объясняется, в чем его ошибка.

Одной из основных педагогических задач, возникающих перед преподавателем, является задача научить школьника говорить и писать. Ни того, ни другого почти все школьники не умеют. Задача эта очень трудна и не всегда выполнима. На попытки справиться с ней уходит очень много времени и сил как у преподавателя, так и у школьника.

Новые непривычные требования, резко возросший объем самостоятельной работы, далеко не сразу приходящие успехи, и как следствие, осознание того, что ты не вундеркинд (часто довольно тяжело переживаемое ребенком), — таков совсем неполный список проблем, с которыми сталкивается школьник в начале учебы в математическом классе. В этот период часто возникает ситуация, когда школьник болезненно воспринимает профессиональные требования своего преподавателя (записать решение задачи, обсудить и ответить на дополнительные вопросы, и т. п.). Проблема заключается в том, что эти требования воспринимаются школьником не в профессиональном плане, а как проявление враждебного отношения к нему со стороны преподавателя. Как правило, такая защитная психологическая реакция исчезает не позднее, чем через месяц-два, когда ребенок замечает, что отношение к нему доброжелательное. К сожалению, в отдельных тяжелых случаях мы не справляемся с ситуацией.

Отметим еще одну трудность. Отсутствие конкретного домашнего задания к данному уроку может создавать у школьников ощущение вечного долга перед преподавателем. В каждый момент времени есть еще нерешенная задача, и поток этих задач нескончаем. Это тяжелая психологическая ноша. Перегрузка по остальным предметам, а также тот факт, что в классе, как правило, существуют ребята с ослабленной психикой (иногда близкой к пограничной), делают задачу грамотного регулирования учебной нагрузки, в том числе и по нашему предмету, весьма актуальной и непростой.

Не обсуждая здесь содержания курса (сделаем это ниже), отметим, что на первый взгляд он может показаться слишком формализованным. Но не следует поспешно обвинять нас в увлечении «преступным бурбакизмом». Мы еще раз подчеркиваем, что содержание листков является лишь внешней канвой учебного процесса. Суть его — в теснейшем профессиональном общении учителя, который может учить, и ученика, который хочет учиться.

Обучение с использованием системы листков имеет свои недостатки. Основной формой работы школьников является решение задач. И хотя задачи разные (и по форме, и по содержанию), процессу в целом присуща некоторая монотонность. При этом других необходимых навыков учебной и научной деятельности (и в частности, таких важных, как умение самостоятельно читать и разбирать математическую литературу, умение работать в группе) у школьников не вырабатывается. Чтобы как-то это компенсировать, мы пытаемся разнообразить формы работы со школьниками. Так, в 10-м и 11-м классах они начинают самостоятельно изучать книги по математике (предлагаемые преподавателями) с последующим их обсуждением на классном семинаре. На этом же семинаре преподаватели (и приглашенные математики) иногда читают небольшие лекции по темам, не входящим в основной курс. (Если, конечно, уровень класса это позволяет.) Крайне ценно умение придумать для себя задачи по теме прочитанного фрагмента книги, прослушанной лекции и т. п. Опыт решения листков может помочь в этом, но необходимы и самостоятельные осознанные действия в этом направлении.

Во второй половине 11-го класса мы уделяем некоторое время специальной подготовке школьников к вступительным экзаменам в высшие учебные заведения. Почти все наши выпускники успешно поступают на механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова или на различные факультеты Московского физико-технического института. Отметим еще, что, несмотря на успехи наших учеников в различных математических соревнованиях самого высокого уровня, мы совершенно не занимаемся в школе специальной подготовкой к олимпиадам. И вообще, соревновательность занимает в нашем учебном процессе далеко не первое место.

В заключение мы хотели бы еще раз сформулировать основные педагогические принципы нашей технологии: индивидуальный подход к каждому ученику при групповом обучении, высокие требования к профессиональному мастерству и педагогическим способностям преподавателей, формирование у школьников высокой мотивации в изучении математики, создание благоприятной психологической обстановки, способствующей максимальному раскрытию способностей школьника.

О содержании курса

В 57-й школе имеются 7 математических классов (один восьмой, два девятых, два десятых и два одиннадцатых класса). В каждом из них работает своя команда математиков. Содержание предмета, который в школьном расписании называется «математический анализ», в разных классах различно и определяется профессиональными вкусами членов команды (см., например, Задачи по математике / Под ред. А. Шеня. М.: МЦНМО, 2000). Конечно, официальный программный материал для классов с углубленным изучением математики является составной частью каждого курса.

Главной темой нашего курса является математический анализ на прямой. Одним из основных аргументов в пользу такого выбора является тематическое единство курса: его основные части взаимосвязаны. В большой степени это относится к обязательной части курса, хотя и дополнительная часть курса имеет свою логику. Учиться в математическом классе тяжело. Взаимосвязанность основных частей курса создает ощущение непрерывности учебного процесса, делает психологическую ситуацию для учеников более устойчивой и, тем самым, более комфортной.

Существует и другой подход, при котором курс строится вокруг «школьной» математики и традиционных «олимпиадно-кружковских» тем. В этом случае психологические нагрузки на школьника снижаются относительной элементарностью изучаемого материала.

Скажем несколько слов о том, почему в основе нашего курса лежит математический анализ в его аксиоматическом варианте. Например, наши школьники изучают аксиомы действительных чисел в 8-м классе, в 12—13 лет. В этом возрасте работа с простыми аксиомами содержит элемент игры, похожей на игру с детским конструктором. Оказывается, что школьникам легче работать с достаточно многочисленными аксиомами поля действительных чисел, чем, скажем, с гораздо более простыми аксиомами группы. Вероятно, это можно объяснить тем, что, во-первых, более ясно очерченные объекты легче для восприятия, во-вторых, больше аксиом — больше возможностей что-то доказать, есть опора на интуитивные представления о числах. Поэтому определение группы отсутствует даже в дополнительной части курса. Быть может, его можно было дать в выпускном классе, в младших классах оно не по возрасту: необходимый для работы с этой темой минимализм математического мышления развивается не быстро.

Примерно то же самое можно сказать и о коммутативной алгебре «кольца-модули-идеалы». Хотя переход к ней от элементарной теории чисел выглядит естественным, она все же слишком сложна для усвоения. Невысокая скорость изучения этой теории ограничивает число интересных примеров для обсуждения. В то же время в курсе анализа, начиная с темы «предел последовательности» и, еще в большей степени, «непрерывность», число примеров для обсуждения практически неограниченно. Однако стоит отметить, что перспективой курса является не углубленное изучение теории функций действительного переменного в стиле «контрпримеры в анализе», а переход к классическому многомерному анализу, завершаемому теоремой Стокса. Естественно, содержание нашего курса перекрывается стандартным университетским курсом анализа. Это едва ли можно считать недостатком ввиду важности темы: по нашему мнению, анализ — основа современной математики (алгебраисты, возможно, считают иначе).

Заметим также, что, поскольку наш курс носит «общеобразовательный» характер, то ученикам в школе даже косвенно не навязывается выбор узкого раздела математики в качестве будущей специализации. Принцип здесь — не загонять школьников в математическое гетто. Следуя ему, мы, в частности, не побуждаем учеников — даже самых способных — к «научной работе», не предлагаем им заниматься нерешенными проблемами.

Обязательная часть курса

Восьмой класс

Теория множеств

Листок 1
сентябрь

<u>Определение 1.</u> Множества A и B называются *равными* (обозначение: $A=B$), если они состоят из одних и тех же элементов.

<u>Определение 2.</u> Множество A называется *подмножеством* множества B (обозначение: $A \subset B$), если каждый элемент, принадлежащий множеству A, принадлежит и множеству B.

<u>Задача 1.</u> Доказать, что для любых множеств A, B, C
а) $A \subset A$; б) если $A \subset B$ и $B \subset C$, то $A \subset C$;
в) $A=B$, если и только если $A \subset B$ и $B \subset A$.

<u>Определение 3.</u> Множество называется *пустым* (обозначение: $\varnothing$), если оно не содержит ни одного элемента.

<u>Задача 2.</u> а) Доказать, что пустое множество является подмножеством любого множества. б) Доказать, что пустое множество единственно.

<u>Задача 3.</u> Сколько а) элементов; б) подмножеств у каждого из следующих множеств: $\{0\}, \varnothing, \{1,2\}, \{1,2,3\}, \{\varnothing\}, \{\{1,2,3\}\}, \{\{1,2\},3\}$?

<u>Задача 4.</u> Может ли у множества быть ровно а) 0; б) 7; в) 16 подмножеств?

<u>Задача 5*.</u> Может ли у множества A быть ровно на 2000 подмножеств больше, чем у множества B?

<u>Задача 6*.</u> Может ли у множества A быть ровно 2000 подмножеств, не являющихся ни подмножествами множества B, ни подмножествами множества C?

<u>Определение 4.</u> *Объединением* множеств A и B (обозначение: $A \cup B$) называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ или $x \in B$.

* Задачи, отмеченные звездочкой, необязательны.

<u>Определение 5.</u> *Пересечением* множеств A и B (обозначение: $A \cap B$) называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ и $x \in B$.

<u>Задача 7.</u> Пусть $A=\{1,3,7,137\}$, $B=\{3,7,100\}$, $C=\{0,1,3,100\}$, $D=\{0,7,100,333\}$. Найти множества: а) $A \cup B$; б) $A \cap B$; в) $(A \cap B) \cup D$; г) $C \cap (D \cap B)$; д) $(A \cup B) \cap (C \cup D)$; е) $(A \cap B) \cup (C \cap D)$; ж) $(D \cup A) \cap (C \cup B)$; з) $(A \cap (B \cap C)) \cap D$; и) $(A \cup (B \cap C)) \cap D$; к) $(C \cap A) \cup ((A \cup (C \cap D)) \cap B)$.

<u>Задача 8.</u> Доказать, что для любых множеств A, B, C
а) $A \cup A = A$, $A \cap A = A$; б) $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
в) $A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$, $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$;
г) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$, $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

<u>Определение 6.</u> *Разностью* множеств A и B (обозначение: $A \setminus B$) называется множество, состоящее из таких x, что $x \in A$ и $x \notin B$.

<u>Задача 9.</u> Для множеств A, B, C, D из задачи 7 найти следующие множества: а) $(A \cup B) \setminus (C \cap D)$; б) $(A \cup D) \setminus (B \cup C)$; в) $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$; г) $D \setminus ((B \cup A) \setminus C)$; д) $((A \setminus (B \cup D)) \setminus C) \cup B$.

<u>Задача 10.</u> Верно ли, что для любых множеств A, B, C
а) $(A \setminus B) \cup B = A$; б) $A \setminus (A \setminus B) = A \cap B$;
в) $A \setminus (B \cup C) = (A \setminus B) \cap (A \setminus C)$; г) $A \setminus (B \cap C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$;
д) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$; е) $(A \setminus B) \cup (B \setminus A) = A \cup B$?

<u>Задача 11*.</u> Сколько разных множеств можно получить из множеств A, B, C, D задачи 7 с помощью операций а) $\cup, \cap, \setminus$; б) $\cup, \cap$; в) $\cup, \setminus$; г) $\cap, \setminus$?

Математическая индукция

Листок 2
сентябрь

Принцип математической индукции. Пусть имеется последовательность утверждений $A_1, A_2, A_3, \ldots$ Если выполняются условия

(1) A_1 верно,

(2) из верности утверждения A_k следует верность утверждения A_{k+1},

то все утверждения верны.

Задача 1. Доказать, что
а) $1+2+3+\ldots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$; б) $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
в) $\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{2\cdot 3}+\dfrac{1}{3\cdot 4}+\ldots+\dfrac{1}{n(n+1)}=\dfrac{n}{n+1}$.

Задача 2. Доказать, что если $q\neq 1$, то $1+q+q^2+\ldots+q^n=\dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$.

Задача 3. Найти следующие суммы:
а) $1+3+5+\ldots+(2n-1)$; б) $1^2+3^2+5^2+\ldots+(2n-1)^2$;
в)* $1^3+2^3+3^3+\ldots+n^3$.

Задача 4. Доказать, что $(1+a)^n\geqslant 1+na$ при $a>-1$.

Задача 5. Доказать, что
а) $2^n>n$; б) $2^n>n^2$ при $n>4$; в) $n!>2^n$ при $n>3$;
г)* найдется такое k, что $2^n>n^{2000}$ при $n>k$.

Задача 6. Доказать, что а) $(2^{5n+3}+5^n\cdot 3^{n+2}) ⋮ 17$; б) $(n^{2m-1}+1) ⋮ (n+1)$.

Задача 7. Доказать, что любую денежную сумму больше 7 рублей можно разменять купюрами достоинством в 3 и 5 рублей.

Задача 8. На сколько частей делят плоскость k прямых в общем положении? (Прямые находятся в общем положении, если любые две из них имеют ровно одну общую точку и никакие три прямые не проходят через одну точку.)

Задача 9*. На сколько частей делят пространство k плоскостей в общем положении? (Плоскости находятся в общем положении, если никакие две из них не параллельны, любые три из них имеют ровно одну общую точку и никакие четыре не проходят через одну точку.)

Задача 10. Доказать, что части, на которые k прямых делят плоскость, всегда можно раскрасить в два цвета так, чтобы соседние части были покрашены по-разному.

Задача 11. Доказать, что всякие n квадратов можно разрезать так, что из полученных частей можно сложить новый квадрат.

Задача 12. Проведены m отрезков с концами в вершинах правильного n-угольника. Доказать, что при $m\leqslant n-2$ всегда найдутся две вершины, которые нельзя соединить ломаной, составленной из этих отрезков.

Задача 13. Доказать, что если число $a+\dfrac{1}{a}$ целое, то и $a^k+\dfrac{1}{a^k}$ тоже целое.

Задача 14*. Доказать, что все последовательности длины n, состоящие из нулей и единиц, можно занумеровать так, что соседние последовательности отличаются ровно одной цифрой.

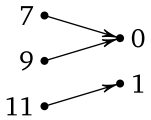
Задача 15*. Доказать, что $n^{n+1}>(n+1)^n$ при $n>2$.

Отображения множеств

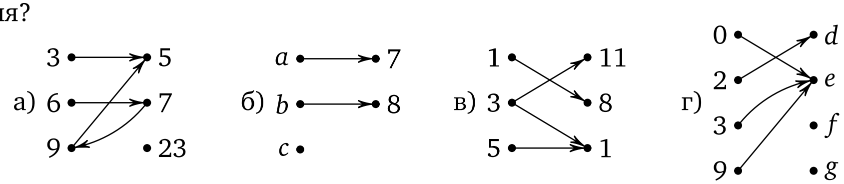
Листок 3
октябрь

Определение 1. Правило f, сопоставляющее каждому элементу x множества X некоторый элемент y множества Y, называется *отображением* из множества X в множество Y. Обозначения: $f\colon X\to Y$, $f(x)=y$, $x\overset{f}{\longmapsto}y$.

Задача 1. Рисунок задает отображение $f\colon\{7,9,11\}\to\{0,1\}$, для которого $f(7)=0$, $f(9)=0$, $f(11)=1$. Нарисовать все отображения из множества $\{a,b,c\}$ в множество $\{0,1\}$.



Задача 2. Какие из следующих картинок определяют отображения?



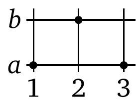
Определение 2. *Произведением* множеств X и Y называется множество всех упорядоченных пар (x,y), где $x\in X$, $y\in Y$. Обозначение: $X\times Y$.

Задача 3. Из каких элементов состоят множества: $\{0,z\}\times\{1\}$, $\{0,z\}\times\{0,z\}$, $\varnothing\times\varnothing$, $\{0,z\}\times\varnothing$, $\{w,t\}\times\{t,w,z\}$, $\{1\}\times\{0,1\}$?

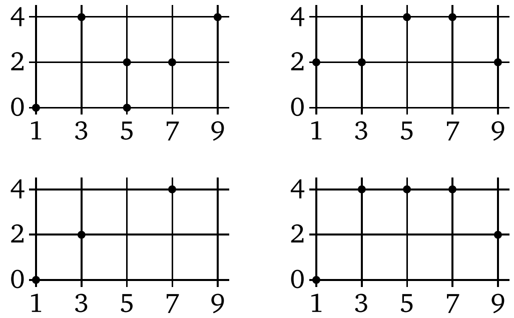
Определение 3. *Графиком* отображения $f\colon X\to Y$ называется множество $\Gamma(f)\subset X\times Y$, состоящее из всех пар вида $(x,f(x))$.

Задача 4. Подмножество $\Gamma\subset X\times Y$ является графиком отображения тогда и только тогда, когда для любого $x\in X$ найдется ровно один элемент $y\in Y$ такой, что $(x,y)\in\Gamma$.

Задача 5. На рисунке изображен график $\{(1,a),(2,b),(3,a)\}$ отображения $f\colon\{1,2,3\}\to\{a,b\}$. Нарисовать всевозможные графики отображений из множества $\{7,9,11\}$ в множество $\{0,1\}$.

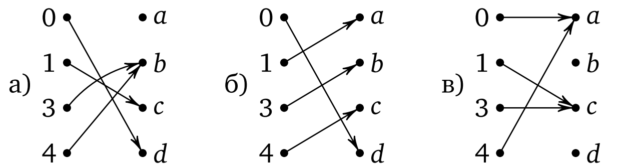


Задача 6. Какие из приведенных ниже картинок соответствуют графикам отображений?



Определение 4. Пусть дано отображение $f\colon X\to Y$. Если $f(x)=y$, то y называется *образом элемента* x, а x — *прообразом элемента* y. Множество, состоящее из всех элементов x таких, что $f(x)=y$, называется *полным прообразом элемента* y при отображении f (обозначение: $f^{-1}(y)$). *Образом* множества $A\subset X$ при отображении f называется множество, состоящее из всех элементов вида $f(x)$, где $x\in A$ (обозначение: $f(A)$). *Прообразом множества* $B\subset Y$ называется множество, состоящее из всех x таких, что $f(x)\in B$ (обозначение: $f^{-1}(B)$).

Задача 7. Для отображения $f\colon\{0,1,3,4\}\to\{a,b,c,d\}$ (см. рис.) найти $f(\{0,3\})$, $f(\{1,3,4\})$, $f^{-1}(a)$, $f^{-1}(\{a,b\})$, $f^{-1}(\{b,d\})$.



Задача 8. Пусть $f\colon X\to Y$, $A_1,A_2\subset X$, $B_1,B_2\subset Y$. Верно ли, что
а) $f(X)=Y$; б) $f^{-1}(Y)=X$; в) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$;
г) $f(A_1\cap A_2)=f(A_1)\cap f(A_2)$; д) $f(A_1\setminus A_2)=f(A_1)\setminus f(A_2)$;
е) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$;
ж) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$;
з) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$;
и) если $A_1\subset A_2$, то $f(A_1)\subset f(A_2)$;
к) если $f(A_1)\subset f(A_2)$, то $A_1\subset A_2$;
л) если $B_1\subset B_2$, то $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$;
м) если $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$, то $B_1\subset B_2$;
н) $f^{-1}(f(A_1))=A_1$; о) $f(f^{-1}(B_1))=B_1$?

Определение 5. Отображение $f\colon X\to Y$ называется *взаимно однозначным*, если для любого $y\in Y$ множество $f^{-1}(y)$ состоит ровно из одного элемента.

Задача 9. Пусть $X=\{0,1,3\}$, $Y=\{7,3,73\}$.

а) Нарисовать всевозможные взаимно однозначные отображения из множества X в множество Y, из множества Y в множество X.

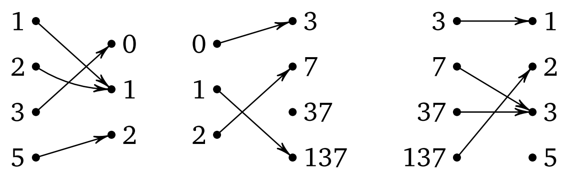
б) Нарисовать графики этих отображений.

Задача 10. Верно ли, что если для отображения $f\colon X\to Y$ выполняются условия $f(X)=Y$, $f^{-1}(Y)=X$, то f взаимно однозначно?

Определение 6. *Композицией* отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$ называется такое отображение $h\colon X\to Z$, что $h(x)=g(f(x))$. Обозначение: $h=g\circ f$.

Задача 11. Доказать, что $h\circ(g\circ f)=(h\circ g)\circ f$ для любых отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to Z$, $h\colon Z\to W$.

Задача 12. Отображения $f\colon \{1,2,3,5\}\to\{0,1,2\}$, $g\colon \{0,1,2\}\to\{3,7,37,137\}$, $h\colon \{3,7,37,137\}\to\{1,2,3,5\}$ заданы рисунком:



f $\qquad$ g $\qquad$ h

Нарисовать следующие отображения и их графики:

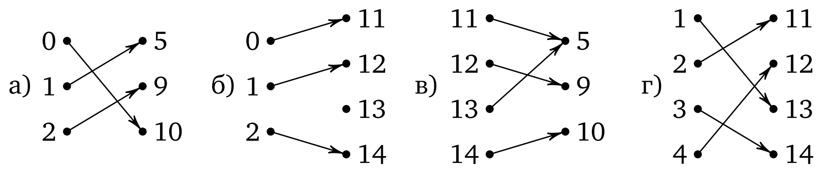
а) $g\circ f$; б) $f\circ g$; в) $f\circ h$; г) $h\circ g\circ f$; д) $f\circ h\circ g$; е) $g\circ h\circ f$; ж) $f\circ h\circ g\circ f$; з) $g\circ f\circ h\circ g$; и) $h\circ f\circ g\circ h$.

Определение 7. Отображение $f\colon X\to X$ называется *тождественным*, если $f(x)=x$ для любого $x\in X$.

Определение 8. Отображение $g\colon Y\to X$ называется *обратным* к отображению $f\colon X\to Y$ (обозначение: $g=f^{-1}$), если отображения $g\circ f$ и $f\circ g$ тождественны. Отображение f называется в этом случае *обратимым*.

Задача 13. Пусть для отображений $f\colon X\to Y$, $g\colon Y\to X$ отображение $f\circ g$ тождественно. Верно ли, что $g=f^{-1}$?

Задача 14. Выясните, какие из следующих отображений обратимы и нарисуйте их обратные. Нарисуйте графики отображений и их обратных.



Задача 15. Докажите, что отображение обратимо тогда и только тогда, когда оно взаимно однозначно.

Задача 16*. Обозначим через $t\colon X\times Y\to Y\times X$ такое отображение, что $(x,y)\overset{t}{\longmapsto}(y,x)$ для любых $x\in X$, $y\in Y$. Докажите, что отображение $f\colon X\to Y$ обратимо тогда и только тогда, когда $t(\Gamma(f))\subset Y\times X$ есть график некоторого отображения $g\colon Y\to X$. Верно ли, что в этом случае $g=f^{-1}$?

Счетность множеств

Листок 4
октябрь

Определение 1. Множества X и Y называются *равномощными*, если существует взаимно однозначное отображение $f: X \to Y$. Обозначение: $|X| = |Y|$.

Задача 1. Доказать, что равномощность есть отношение эквивалентности, то есть:
1) $|A| = |A|$; 2) если $|A| = |B|$, то $|B| = |A|$;
3) если $|A| = |B|$ и $|B| = |C|$, то $|A| = |C|$.

Задача 2. Доказать, что $|X \times Y| = |Y \times X|$ для любых множеств X, Y.

Задача 3. Верно ли, что если $|A| = |B|$ и $|C| = |D|$, то
а) $|A \times C| = |B \times D|$; б) $|A \cup C| = |B \cup D|$?

Определение 2. Множество называется *конечным*, если оно пусто или равномощно множеству $\{1, 2, \ldots, n\}$ для некоторого натурального n. Множество называется *бесконечным*, если оно не является конечным.

Определение 3. Множество называется *счетным*, если оно равномощно множеству натуральных чисел (обозначение множества натуральных чисел: $\mathbb{N}$). Множество называется *несчетным*, если оно бесконечно и не счетно.

Задача 4. Доказать, что следующие множества счетны:
а) множество четных натуральных чисел;
б) множество нечетных натуральных чисел;
в) множество натуральных чисел без числа 2005;
г) множество целых чисел (обозначение: $\mathbb{Z}$).

Задача 5. Доказать, что всякое подмножество счетного множества конечно или счетно.

Задача 6. Доказать, что если X счетно, а Y конечно и непусто, то $X \times Y$ счетно.

Задача 7. Доказать, что объединение конечного числа счетных множеств счетно.

Определение 4. *Объединением счетного числа множеств* $A_1, A_2, \ldots$ $\ldots, A_n, \ldots$ называется множество, состоящее из всех таких элементов x, что $x \in A_n$ для некоторого $n \in \mathbb{N}$. Обозначение: $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n$.

Задача 8. Доказать, что если X и Y счетны, то $X \times Y$ также счетно.

Задача 9. Доказать, что объединение счетного числа различных конечных множеств счетно.

Задача 10. Доказать, что объединение счетного числа счетных множеств счетно.

Задача 11. Доказать, что следующие множества счетны:
а) множество всевозможных конечных последовательностей нулей и единиц;
б) множество всевозможных русских «слов».

Задача 12. Доказать, что равномощны:
а) любые два отрезка на плоскости;
б) любые два интервала на плоскости;
в) любые две окружности на плоскости;
г) интервал и полуокружность без концов;
д) интервал и прямая.

Задача 13. Доказать, что у всякого бесконечного множества есть счетное подмножество.

Задача 14. Пусть A конечно или счетно, а B бесконечно. Доказать, что $|A \cup B| = |B|$.

Задача 15. Множество точек отрезка равномощно множеству точек интервала.

Задача 16*. Множество бесконечных последовательностей нулей и единиц несчетно.

Задача 17*. Если A несчетно, а B счетно, то $A \setminus B$ равномощно A.

Комбинаторика

Листок 5
декабрь

Задача 1. В классе из 22 человек Б. М. должен поставить оценки за четверть по математическому анализу. Сколькими способами он может это сделать?

Задача 2. Семь учеников решили вместе покататься

а) на аттракционе «поезд», состоящем из 7 одноместных вагончиков;

б) на карусели, у которой 7 мест;

в) на поезде из 10 одноместных вагончиков;

г) на карусели, у которой 10 мест;

д)* на поезде из 7 двухместных вагончиков.

Сколькими способами они смогут это сделать?

Задача 3. Сколько подмножеств у множества из n элементов?

Задача 4. Сколькими способами в классе из 22 человек можно назначить старосту и двух его заместителей?

Задача 5. Сколько существует отображений множества из n элементов в множество из m элементов?

Задача 6. Сколько существует взаимно однозначных отображений множества из n элементов в себя?

Задача 7. Сколькими способами можно представить множество A из n элементов в виде объединения попарно непересекающихся множеств $A_1, \ldots, A_m$ (наборы множеств, отличающиеся нумерацией, считаются различными)?

Задача 8. Азбука Морзе кодирует буквы и цифры последовательностями сигналов двух типов (точка и тире), при этом самые длинные последовательности состоят из пяти сигналов. Можно ли обойтись более короткими последовательностями?

Задача 9. Сколько существует различных игральных кубиков? (На гранях кубика расставлены числа от 1 до 6.)

Задача 10. Сколько существует семизначных телефонных номеров (последовательностей цифр от 0 до 9), в которых

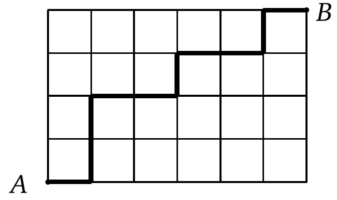
а) не встречаются цифры 5 и 7;

б) две одинаковые цифры не идут подряд;

в) есть хотя бы две одинаковые цифры?

Определение 1. *Числом сочетаний* из n по m называется количество подмножеств из m элементов множества из n элементов. Обозначение: C_n^m.

Задача 11. На клетчатой бумаге нарисован прямоугольник $n \times k$ клеток. Доказать, что число $(n+k)$-звенных путей, идущих из вершины A в вершину B по сторонам клеток, равно C_{n+k}^n.



Задача 12. Доказать, что

а) $C_n^m = C_n^{n-m}$; б) $C_n^{m-1} + C_n^m = C_{n+1}^m$; в)* $C_n^k C_{n-k}^{m-k} = C_m^k C_n^m$;

г) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + \ldots + C_n^n = 2^n$; д) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - \ldots + (-1)^n C_n^n = 0$;

е)* $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + \ldots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n$.

Задача 13. *Треугольником Паскаля* называется треугольная таблица (см. рис.), составленная из чисел согласно следующему правилу. Строка с номером n состоит из n чисел, первое и последнее числа каждой строки равны единице, а каждое из остальных чисел равно сумме двух ближайших к нему чисел в предыдущей строке. Доказать, что m-е число в n-й строке равно C_{n-1}^{m-1}.

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
. . . .

Задача 14. Верно ли, что в треугольнике Паскаля любое число, кроме единицы, встречается лишь конечное число раз?

Задача 15*. В каких строках треугольника Паскаля все числа нечетные?

Задача 16. Найти явное выражение для C_n^k.

Задача 17. Сколько существует семизначных телефонных номеров, в которых

а) ровно четыре девятки;

б) по крайней мере четыре девятки;
в) по крайней мере две девятки и две семерки;
г) каждая следующая цифра меньше предыдущей;
д)* каждая следующая цифра не больше предыдущей?

Задача 18*. Каких телефонных номеров больше: тех, в которых за семеркой не идет восьмерка, или тех, в которых не встречаются две семерки подряд? На сколько?

Задача 19. Доказать, что $(a+b)^n = \mathrm{C}_n^0 a^n + \mathrm{C}_n^1 a^{n-1} b + \mathrm{C}_n^2 a^{n-2} b^2 + \ldots$ $\ldots + \mathrm{C}_n^n b^n$.

Действительные числа, ч. 1
Аксиомы поля

Листок 6
январь

Рассмотрим множество F, на котором введены две бинарные операции (отображения из $F \times F$ в F), называемые сложением и умножением. Свойства этих операций описываются системой аксиом. (Буквы $a, b, c, \ldots$ обозначают элементы множества F.)

Сложение. Каждой паре элементов a, b ставится в соответствие элемент c, называемый *суммой* a и b (обозначение: $c = a + b$), так, что выполняются следующие условия (аксиомы):

1. $\forall a, b \;\; a+b=b+a$ (*коммутативность*).
2. $\forall a, b, c \;\; (a+b)+c=a+(b+c)$ (*ассоциативность*).
3. В F существует такой элемент 0 (*ноль*), что $a+0=a$ для любого a.
4. $\forall a \; \exists b \;\; a+b=0$; элемент b называется *противоположным* к a и обозначается $-a$.

Сумма $c+(-d)$ записывается в виде $c-d$ и называется *разностью* элементов c и d.

Задача 1. $((a+b)+c)+d=a+(b+(c+d))$.

Задача 2. В F существует лишь один ноль.

Задача 3. Для каждого x в F существует лишь один противоположный элемент.

Задача 4. Элемент, противоположный сумме, есть сумма элементов, противоположных каждому слагаемому.

Задача 5. Уравнение $a+x=b$ имеет в F единственное решение.

Умножение. Каждой паре элементов a, b ставится в соответствие элемент c, называемый *произведением* a и b (обозначение: $c = a \cdot b$), так, что выполняются следующие условия (аксиомы):

5. $\forall a, b \;\; a \cdot b = b \cdot a$ (*коммутативность*).
6. $\forall a, b, c \;\; (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ (*ассоциативность*).
7. В F существует такой элемент 1 (*единица*), что для любого a $a \cdot 1 = a$, причем $1 \neq 0$.
8. $\forall a \neq 0 \; \exists b \;\; a \cdot b = 1$; элемент b называется *обратным* к a и обозначается $\frac{1}{a}$.
9. $\forall a, b, c \;\; a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$ (*дистрибутивность* умножения относительно сложения).

Произведение $c \cdot \frac{1}{d}$ записывается в виде $\frac{c}{d}$ и называется *отношением* (*частным*) элементов c и d.

Задача 6. $((a\cdot b)\cdot c)\cdot d=a\cdot(b\cdot(c\cdot d))$.

Задача 7. В F существует лишь одна единица.

Задача 8. Уравнение $a\cdot x=b$ при $a\neq 0$ имеет в F единственное решение.

Задача 9. Пусть $a\cdot b=0$. Тогда хотя бы один из элементов a, b равен нулю.

Задача 10. $(-1)\cdot a=-a$.

Задача 11. $a\cdot a=(-a)\cdot(-a)$.

Задача 12. $\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}=\frac{a\cdot c}{b\cdot d}$.

Задача 13. $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a\cdot d+c\cdot b}{b\cdot d}$.

Определение 1. Множество с операциями сложения и умножения, удовлетворяющее аксиомам 1—9, называется *полем*.

Задача 14. Существует ли множество с операциями сложения и умножения, удовлетворяющее аксиомам 1—9, где в аксиоме 7 условие $1\neq 0$ заменено на $1=0$?

Задача 15. Существует ли поле из
а) двух элементов;
б) трех элементов;
в)* p элементов, где p — простое;
г)* четырех элементов;
д)* шести элементов?

Действительные числа, ч. 2
Упорядоченное поле

Листок 7
январь

Определение 1. На поле F задано *отношение порядка*, если выделено подмножество $P\subset F$ (называемое множеством *положительных чисел*), удовлетворяющее следующим условиям (аксиомам):

1. Для любого x верно ровно одно из трех утверждений: $x\in P$, $x=0$ или $-x\in P$.
2. Если $x, y\in P$, то $x+y\in P$ и $xy\in P$.

Поле в этом случае называется *упорядоченным полем*.

Обозначения. Пусть $a, b\in F$. Тогда

$a>b$ (a больше b), если $a-b\in P$;
$a\geqslant b$ (a больше или равно b), если $a-b\in P$ или $a=b$;
$a<b$ (a меньше b), если $b-a\in P$;
$a\leqslant b$ (a меньше или равно b), если $b-a\in P$ или $b=a$.

Задача 1. Для любых a, b верно ровно одно из трех утверждений: $a>b$, $a=b$ или $a<b$.

Задача 2. Если $a>b$ и $b>c$, то $a>c$.

Задача 3. Если $a>b$, то $a+c>b+c$ для любого c.

Задача 4. Если $a>b$ и $c>0$, то $ac>bc$.

Задача 5. Утверждения $a>b$, $a-b>0$, $-a<-b$ и $b-a<0$ равносильны.

Задача 6. Если $a\geqslant b$ и $c\geqslant d$, то $a+c\geqslant b+d$.

Задача 7. Если $a>b$ и $c<0$, то $ac<bc$.

Задача 8. Доказать, что $1>0$.

Задача 9. Если $a>b>0$, то $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$.

Задача 10. Если $a\geqslant b>0$ и $c\geqslant d>0$, то $ac\geqslant bd$.

Определение 2. Подмножество A поля F называется *индуктивным*, если $1\in A$ и из $x\in A$ следует $x+1\in A$.

Определение 3. Пересечение всех индуктивных подмножеств упорядоченного поля F называется множеством *натуральных чисел* (обозначение: $\mathbb{N}$).

Задача 11. Доказать, что множество натуральных чисел непусто.

Задача 12. Доказать, что все натуральные числа положительны.

<u>Задача 13.</u> Сформулировать и доказать принцип математической индукции.

<u>Задача 14.</u> а) Пусть $a, b \in \mathbb{N}$. Тогда $a+b \in \mathbb{N}$ и $ab \in \mathbb{N}$.
б) Пусть $a \in \mathbb{N}$ и $a \neq 1$. Тогда $a-1 \in \mathbb{N}$.
в) Пусть $a, b \in \mathbb{N}$ и $a > b$. Тогда $a-b \in \mathbb{N}$.

<u>Задача 15.</u> Доказать, что для любого натурального n между $n-1$ и n нет натуральных чисел.

<u>Задача 16*.</u> Доказать, что любое непустое подмножество множества $\mathbb{N}$ имеет наименьший элемент.

<u>Определение 4.</u> Множество $\mathbb{Z} = \mathbb{N} \cup \{0\} \cup \{-n \mid n \in \mathbb{N}\}$ называется множеством *целых чисел*.

<u>Определение 5.</u> Множество $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{p}{q} \,\middle|\, p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N} \right\}$ называется множеством *рациональных чисел*.

<u>Задача 17.</u> Образуют ли поле следующие подмножества упорядоченного поля F (операции сложения и умножения те же, что и в F): а) $\mathbb{Z}$, б) $\mathbb{Q}$?

<u>Задача 18.</u> Доказать, что
а) $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100} < \frac{1}{10}$; б)* $\frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \ldots \cdot 99}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \ldots \cdot 100} < \frac{1}{12}$.

<u>Задача 19.</u> Доказать, что найдется такое $p \in \mathbb{N}$, что для любого натурального k, большего p, $k^{100} < 1000 \cdot 2^k < k!$.

<u>Задача 20.</u> Доказать, что существует такое натуральное k, что
а) $1{,}0001^k > 1\,000\,000$; б) $0{,}999^k < 0{,}000001$.

<u>Задача 21.</u> Доказать, что для любого натурального k

$$\left(1 + \frac{1}{k+1}\right)^{k+1} > \left(1 + \frac{1}{k}\right)^k.$$

<u>Задача 22.</u> Доказать, что для любого положительного рационального ε найдется такое $k \in \mathbb{N}$, что для любого $n \in \mathbb{N}$, большего k, будет выполняться неравенство

$$\frac{2}{3} - \varepsilon < \frac{2n^2 + n - 100}{3n^2 + 67} < \frac{2}{3} + \varepsilon.$$

Действительные числа, ч. 3
Точная верхняя грань

<u>Листок 8</u>
февраль

<u>Определение 1.</u> Подмножество M упорядоченного поля F называется *ограниченным сверху (снизу)*, если существует такой элемент $C \in F$, что для любого $x \in M$ $x \leqslant C$ ($x \geqslant C$). В этом случае C называется *верхней (нижней) гранью* множества M.

<u>Задача 1.</u> Верно ли, что множество положительных чисел ограничено сверху (снизу)?

<u>Определение 2.</u> Подмножество M упорядоченного поля F называется *ограниченным*, если оно ограничено сверху и снизу.

<u>Определение 3.</u> *Модулем (абсолютной величиной)* элемента $a \in F$ называется элемент $|a|$, равный a, если $a \geqslant 0$, и $-a$, если $a < 0$.

<u>Задача 2.</u> Доказать, что множество M ограничено тогда и только тогда, когда $\exists C \ \forall x \in M \ \ |x| \leqslant C$.

<u>Задача 3.</u> Пусть множества L и M непусты. Верно ли, что L и M ограничены тогда и только тогда, когда ограничено множество
а) $S = \{l + m \mid l \in L, m \in M\}$;
б) $P = \{lm \mid l \in L, m \in M\}$?

<u>Определение 4.</u> Число C называется *точной верхней (нижней) гранью* множества M, если
1) $\forall x \in M \ \ x \leqslant C$ ($x \geqslant C$);
2) $\forall C_1 < C$ ($\forall C_1 > C$) $\exists x \in M \ \ x > C_1$ ($x < C_1$).
Обозначение: $C = \sup M$ (*супрéмум*) ($C = \inf M$ (*инфúмум*)).

<u>Определение 5.</u> Число C называется *точной верхней (нижней) гранью* множества M, если C есть наименьшая (наибольшая) из верхних (нижних) граней множества M.

<u>Задача 4.</u> Доказать равносильность определений 4 и 5.

<u>Задача 5.</u> Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества M, если они существуют:
а) $M = \left\{ \frac{1}{a} \,\middle|\, a > 2 \right\}$; б) $M = \{a + b \mid -1 < a < 1, -3 \leqslant b < 2\}$;
в) $M = \{ab \mid -1 < a < 2, -5 < b \leqslant 3\}$; г) $M = \{a^2 + a \mid -3 < a < 4\}$.

<u>Задача 6.</u> У каждого множества существует не больше одной точной верхней (нижней) грани.

<u>Задача 7.</u> Доказать, что не существует такого $q \in \mathbb{Q}$, что $q^2 = 2$.

Задача 8. Множество рациональных чисел, квадрат которых меньше числа 3, не имеет в $\mathbb{Q}$ точной верхней грани.

Определение 6. *Полем действительных чисел* называется упорядоченное поле $\mathbb{R}$, удовлетворяющее следующему условию:
Аксиома о точной верхней грани. Всякое непустое ограниченное сверху подмножество поля $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}$ точную верхнюю грань.

Задача 9. Всякое непустое ограниченное снизу подмножество поля $\mathbb{R}$ имеет в $\mathbb{R}$ точную нижнюю грань.

Задача 10. Пусть множества $A, B \subset \mathbb{R}$ ограничены и непусты. Доказать, что
а) $\sup\{a+b \mid a \in A, b \in B\} = \sup A + \sup B$;
б) $\inf\{a+b \mid a \in A, b \in B\} = \inf A + \inf B$;
в) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$;
г) $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$;
д) $\max(\inf A, \inf B) \leqslant \inf(A \cap B) \leqslant \sup(A \cap B) \leqslant \min(\sup A, \sup B)$, если $A \cap B \neq \varnothing$.

Определение 7. Множество $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ называется множеством *иррациональных чисел*.

Задача 11. Множество иррациональных чисел не пусто.

Задача 12 (*Аксиома Архимеда*). Доказать, что для любого $a \in \mathbb{R}$ найдется такое натуральное n, что $n > a$.

Задача 13. Пусть $P_k = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{k}$. Доказать, что
а) $P_{500} > 5$; б) множество $M = \{P_k \mid k \in \mathbb{N}\}$ неограничено в $\mathbb{R}$.

Задача 14. Найти точные верхнюю и нижнюю грани множества $M \subset \mathbb{R}$, если они существуют:
а) $M = \left\{-\frac{1}{2^k} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}\right\}$; б) $M = \left\{\frac{1}{n} - n \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$.

Задача 15. Доказать, что между двумя различными действительными числами найдется
а) бесконечно много рациональных чисел;
б) бесконечно много иррациональных чисел.

Определение 8. Пусть $a, b \in \mathbb{R}$ и $a < b$. *Отрезком* $[a, b]$ называется множество $I = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$. *Системой вложенных отрезков* называется такая последовательность отрезков $I_1, I_2, \ldots$, что $I_1 \supset I_2 \supset \ldots$

Задача 16. Пересечение системы вложенных отрезков не пусто.

Задача 17. Пересечение системы вложенных отрезков состоит из одной точки тогда и только тогда, когда для любого положительного ε в этой системе найдется отрезок $[a, b]$ длины $b - a < \varepsilon$.

Задача 18. Множество действительных чисел несчетно.

Десятичная запись действительного числа

Листок 9
март

Определение 1. $2=1+1,\ 3=2+1,\ 4=3+1,\ 5=4+1,\ 6=5+1,\ 7=6+1,\ 8=7+1,\ 9=8+1,\ 10=9+1.$

Определение 2. Запись вида $\overline{a_n a_{n-1}\ldots a_2 a_1}$, где каждое из a_i — цифра (то есть один из знаков 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9) и $a_n \neq 0$, называется *десятичной записью натурального числа* $a_n\cdot 10^{n-1}+a_{n-1}\cdot 10^{n-2}+\ldots$ $\ldots+a_2\cdot 10+a_1$.

Задача 1. Каждое натуральное число имеет ровно одну десятичную запись.

Определение 3. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k$, где A — десятичная запись натурального числа или ноль, а α_i — цифры, называется *конечной десятичной дробью* и обозначает число $\pm\left(A+\frac{\alpha_1}{10}+\frac{\alpha_2}{10^2}+\ldots+\frac{\alpha_k}{10^k}\right)$.

Задача 2. Верно ли, что каждое рациональное число имеет ровно одну запись в виде конечной десятичной дроби?

Определение 4. Запись вида $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$, где A — десятичная запись натурального числа или ноль, а α_i — цифры, называется *бесконечной десятичной дробью* и обозначает число $\pm\sup\{A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots\alpha_k \mid k\in\mathbb{N}\}$.

Задача 3. Доказать, что определение 4 корректно, т. е. каждой бесконечной десятичной дроби соответствует действительное число.

Определение 5. Бесконечная десятичная дробь $\pm A{,}\alpha_1\alpha_2\ldots$ называется *периодической*, если $\exists k,l\in\mathbb{N}\ \forall m>k\ \ \alpha_m=\alpha_{m+l}$. Обозначение: $\pm A{,}\alpha_1\ldots\alpha_k(\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+l})$. Последовательность цифр $\alpha_{k+1}\ldots\alpha_{k+l}$ называется *периодом* дроби.

Задача 4. Доказать, что если $0{,}\alpha_1\alpha_2\ldots>0{,}\beta_1\beta_2\ldots$, то $\exists k\in\mathbb{N}\ \forall i<k$ $\alpha_i=\beta_i$, $\alpha_k>\beta_k$. Верно ли обратное?

Задача 5. Доказать, что каждое действительное число может быть задано бесконечной десятичной дробью. В каких случаях такая дробь единственна?

Задача 6. Доказать, что
а) всякая периодическая дробь задает рациональное число;
б) всякое рациональное число задается периодической дробью.

Задача 7. Доказать, что число 0,1234567891011121314... иррационально.

Возведение в степень

Листок 10
апрель

Определение 1. Пусть $a\in\mathbb{R}$, $n\in\mathbb{Z}$. Тогда $a^n=\underbrace{a\cdot a\cdot\ldots\cdot a}_{n\text{ раз}}$ при $n>0$; $a^0=1$ при $a\neq 0$; $a^n=\frac{1}{a^{-n}}$ при $n<0$, $a\neq 0$.

Задача 1. Пусть $a>0$, $b>0$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$. Доказать, что
а) $a^m a^n=a^{m+n}$; б) $a^n b^n=(ab)^n$; в) $(a^m)^n=a^{mn}$.

Задача 2. Пусть $a>0$, $m\in\mathbb{Z}$, $n\in\mathbb{Z}$, $m>n$. Доказать, что
а) если $a>1$, то $a^m>a^n$; б) если $a<1$, то $a^m<a^n$.

Задача 3. Пусть $a>b$, $b>0$, $n\in\mathbb{Z}$. Доказать, что
а) если $n>0$, то $a^n>b^n$; б) если $n<0$, то $a^n<b^n$.

Определение 2. Пусть $n\in\mathbb{N}$. *Арифметическим корнем n-й степени* из неотрицательного числа a называется такое неотрицательное число x, что $a=x^n$. Обозначение: $x=\sqrt[n]{a}$.

Задача 4. Пусть $n\in\mathbb{N}$, $B=\{b^n \mid b>1\}$. Доказать, что $\inf B=1$.

Задача 5. Пусть $a>0$, $n\in\mathbb{N}$, $X=\{c>0 \mid c^n\leqslant a\}$, $Y=\{c>0 \mid c^n\geqslant a\}$. Доказать, что $\sup X=\inf Y$.

Задача 6. Доказать, что для любых $n\in\mathbb{N}$ и $a\geqslant 0$ арифметический корень $\sqrt[n]{a}$ существует и единствен.

Определение 3. Пусть $a\geqslant 0$, $k\in\mathbb{Z}$, $u\in\mathbb{N}$. Тогда $a^{k/u}=\sqrt[u]{a^k}$.

Задача 7. Доказать, что определение 3 корректно, то есть число a^q не зависит от выбора представления q в виде $\frac{k}{u}$.

Задача 8. Решите задачи 1—3 для рациональных m и n.

Задача 9. Пусть $a>1$, $A=\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q>0\}$. Доказать, что
а) множество A не ограничено сверху; б) $\inf A=1$.

Задача 10. Пусть $a>0$, $s\in\mathbb{R}$, $X=\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q\leqslant s\}$, $Y=\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q\geqslant s\}$. Доказать, что
а) если $a>1$, то $\sup X=\inf Y$; б) если $a<1$, то $\inf X=\sup Y$.

Определение 4. При $s>0$ $0^s=0$. Пусть $a>0$, $s\in\mathbb{R}$. Тогда $a^s=\sup\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q\geqslant s\}$ при $a<1$, $a^s=\sup\{a^q \mid q\in\mathbb{Q},\ q\leqslant s\}$ при $a\geqslant 1$.

Задача 11. Докажите, что определения 1, 3, 4 не противоречат друг другу.

Задача 12. Решите задачи 1а), 1б), 2, 3 для действительных m и n.

Задача 13*. Решите задачу 1в) для действительных m и n.

Девятый класс

Предел последовательности, ч. 1

Листок 11
сентябрь

Определение 1. Интервал $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, где $\varepsilon>0$, называется *ε-окрестностью* точки (числа) a и обозначается $U_\varepsilon(a)$.

Задача 1. Доказать, что число x принадлежит ε-окрестности точки a тогда и только тогда, когда $|x-a|<\varepsilon$.

Определение 2. *Бесконечная последовательность* действительных чисел — это запись вида $x_1, x_2, x_3, \ldots$, сопоставляемая отображению $x\colon \mathbb{N}\to\mathbb{R}$ по правилу $x_i=x(i)$. Обозначение: (x_n).

Определение 3. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если $\forall\varepsilon>0\ \exists k\in\mathbb{N}\ \forall n>k\ \ |x_n-a|<\varepsilon$. Обозначения: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$; (2) $x_n\to a$ при $n\to\infty$.

Определение 4. Говорят, что *почти все* члены последовательности (x_n) удовлетворяют некоторому условию, если существует лишь конечное число таких элементов $i\in\mathbb{N}$, что x_i не удовлетворяет этому условию.

Определение 5. Число a называется *пределом* последовательности (x_n), если любая ε-окрестность точки a содержит почти все члены этой последовательности.

Задача 2. Докажите эквивалентность определений 3 и 5.

Задача 3. Могут ли два разных числа быть пределами одной последовательности?

Задача 4. Что означает, что число a не является пределом последовательности (x_n)?

Задача 5. Какие из следующих последовательностей имеют пределы?
а) $1, -\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, -\frac{1}{4}, \ldots$; б) $1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots$; в) $-1, 1, -1, 1, -1, 1, \ldots$;
г) $0, \frac{1}{2}, 0, \frac{1}{3}, 0, \frac{1}{4}, \ldots$; д) 0,2, 0,22, 0,222, …;
е) $0, 1\frac{1}{2}, -\frac{2}{3}, 1\frac{1}{4}, -\frac{4}{5}, 1\frac{1}{6}, \ldots$

Определение 6. Число a называется *предельной точкой* последовательности (x_n), если $\forall\varepsilon>0\ \forall k\in\mathbb{N}\ \exists n>k\ \ |x_n-a|<\varepsilon$.

Задача 6. Число a есть предельная точка последовательности (x_n), если и только если любая ε-окрестность точки a содержит бесконечно много членов этой последовательности.

Задача 7. Доказать, что если последовательность сходится к a (то есть a является ее пределом), то она не имеет предельных точек, отличных от a.

Задача 8. Для каждой из следующих последовательностей указать все ее предельные точки:
а) $y_n=\frac{n+1}{n}$; б) $y_n=(-1)^n$; в) $y_n=n$; г) $y_n=n^{(-1)^n}$.

Задача 9. Существует ли последовательность, множество предельных точек которой есть
а) $\mathbb{N}$; б) $[0,1]$; в) $\mathbb{Q}$?

Определение 7. Последовательность (y_k) называется *подпоследовательностью* последовательности (x_n), если существует такая последовательность натуральных чисел (n_k), что $n_{k+1}>n_k$ и $y_k=x_{n_k}$ для каждого k.

Задача 10. Если последовательность имеет предел a, то и любая ее подпоследовательность также имеет предел a.

Задача 11. Если a является предельной точкой последовательности, то из этой последовательности можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к a. Верно ли обратное утверждение?

Определение 8. Последовательность (x_n) называется *ограниченной*, если $\exists C\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ |x_n|<C$.

Задача 12. Доказать, что если последовательность имеет предел, то она ограничена. Верно ли обратное утверждение?

Задача 13. Доказать, что всякая ограниченная последовательность имеет хотя бы одну предельную точку.

Задача 14. Пусть a — единственная предельная точка ограниченной последовательности (x_n). Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=a$.

Определение 9. Говорят, что последовательность (x_n) *стремится к бесконечности,* если $\forall C\ \ \exists k\in\mathbb{N}\ \ \forall n>k\ \ |x_n|>C$. Обозначения: (1) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n=\infty$; (2) $x_n\to\infty$ при $n\to\infty$.

Задача 15. Сформулировать, что значит, что $y_n\to+\infty$ $(-\infty)$ при $n\to\infty$.

Задача 16. а) Из всякой ограниченной последовательности можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

б) Из всякой неограниченной последовательности можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к $+\infty$ или к $-\infty$.

Определение 10. Последовательность (x_n) называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k\ \forall m, n > k\ \ |x_m - x_n| < \varepsilon$.

Задача 17. Последовательность (x_n) сходится тогда и только тогда, когда она фундаментальна.

Задача 18. Какие из следующих последовательностей ограничены? стремятся к бесконечности? не ограничены?

а) $z_n = n$; б) $z_n = (-1)^n \cdot n$; в) $z_n = n^{(-1)^n}$;

г) $z_n = \begin{cases} n & \text{при четном } n, \\ \sqrt{n} & \text{при нечетном } n; \end{cases}$ д) $z_n = \dfrac{100n}{100 + n^2}$.

Предел последовательности, ч. 2

Листок 12
сентябрь

Определение 1. Последовательность называется *бесконечно малой*, если ее предел равен нулю.

Задача 1. $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = a \iff x_n = a + \alpha_n$, где (α_n) — бесконечно малая последовательность.

Задача 2. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Тогда, если для почти всех $n \in \mathbb{N}$ выполняется

а) равенство $x_n = y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) неравенство $x_n \geqslant y_n$, то $\lim\limits_{n\to\infty} x_n \geqslant \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Задача 3. Пусть последовательности (x_n) и (y_n) сходятся. Тогда

а) $(x_n \pm y_n)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \pm y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \pm \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

б) $(x_n \cdot y_n)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n \cdot y_n) = \lim\limits_{n\to\infty} x_n \cdot \lim\limits_{n\to\infty} y_n$;

в) $\left(\dfrac{x_n}{y_n}\right)$ сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{x_n}{y_n} = \dfrac{\lim\limits_{n\to\infty} x_n}{\lim\limits_{n\to\infty} y_n}$ (если $\forall i\ \ y_i \neq 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n \neq 0$).

Задача 4. Пусть (x_n) — последовательность, все члены которой отличны от нуля. Тогда

а) $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = \infty$; б) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{x_n} = 0 \iff \lim\limits_{n\to\infty} x_n = \infty$.

Задача 5. Пусть (x_n), (y_n) и (z_n) — такие последовательности, что для почти всех $n \in \mathbb{N}$ справедливо неравенство $x_n \leqslant y_n \leqslant z_n$ и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} z_n = a$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = a$ (*принцип двух милиционеров*).

Задача 6. Найти пределы следующих последовательностей при $n \to \infty$:

а) $x_n = \dfrac{2n-2}{7n+3}$; б) $x_n = \dfrac{5n^2 - 4n + 3}{6n^2 + 10n - 1}$; в) $x_n = \dfrac{n}{\sqrt{n^2+1}}$;

г) $x_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$; д) $x_n = \sqrt{n^2+n+1} - \sqrt{n^2-n+1}$.

Определение 2. Последовательность (x_n) называется *монотонно возрастающей* (*неубывающей, убывающей, невозрастающей*), если $\forall n \in \mathbb{N}\ \ x_n < x_{n+1}$ (соответственно $x_n \leqslant x_{n+1}$, $x_n > x_{n+1}$, $x_n \geqslant x_{n+1}$). Такие последовательности называются *монотонными*.

Задача 7*. Из всякой последовательности можно выделить монотонную подпоследовательность.

Задача 8. Монотонная последовательность не может иметь более одной предельной точки.

Задача 9. Монотонная ограниченная последовательность сходится.

Задача 10. Доказать, что следующие последовательности сходятся и найти их пределы:

а) $x_n = c^n$ ($|c| < 1$); б) $x_n = \frac{c^n}{n!}$ ($c > 0$); в) $x_1 = \frac{1}{2}$, $x_n = x_{n-1} - x_{n-1}^2$.

Задача 11. При каких $a, b \in \mathbb{R}$ сходится последовательность (y_n), где

а) $y_1 = a$, $y_{n+1} = 1 + by_n$; б)* $y_1 = a$, $y_{n+1} = b + \sqrt{y_n^2 + 1}$?

Задача 12. При каких $a > 0$ ограничена последовательность (x_n), заданная условиями $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$?

Задача 13*. Доказать, что последовательности $x_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \ldots$ $\ldots + \frac{1}{n!}$ и $y_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходятся и $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$.

Задача 14*. Найти $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a^n}{n^k}$ ($a \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$).

Задача 15*. Доказать, что $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Задача 16*. Доказать, что если последовательность (x_n) сходится, то последовательность средних арифметических $\frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$ также сходится и $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$.

Задача 17*. Доказать, что найдется ровно одно число $a \in \mathbb{R}$, для которого сходится последовательность (x_n), заданная условиями $x_1 = a$, $x_{n+1} = x_n + x_n^3 + \frac{1}{n}$.

Задача 18*. Пусть $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Доказать, что найдется такая ненулевая сходящаяся последовательность (x_n), что $\forall n \in \mathbb{N}$ $x_{n+2} = x_{n+1} + a_n x_n$.

Задача 19*. Даны числа a, b, c, d, e. Построим последовательности (a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n), где $a_1 = a$, $b_1 = b$, $c_1 = c$, $d_1 = d$, $e_1 = e$; $a_{n+1} = (e_n + b_n)/2$, $b_{n+1} = (a_n + c_n)/2$, $c_{n+1} = (b_n + d_n)/2$, $d_{n+1} = (c_n + e_n)/2$, $e_{n+1} = (d_n + a_n)/2$. Доказать, что эти последовательности имеют общий предел и найти его.

Задача 20*. Пусть (a_n) — последовательность натуральных чисел. Построим последовательность (b_n), где

$$b_1 = a_1,\quad b_2 = a_1 + \frac{1}{a_2},\quad b_3 = a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{a_3}},\quad \ldots$$

а) Доказать, что последовательность (b_n) сходится.

б) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_n = 1$.

в) Найти $\lim\limits_{n\to\infty} b_n$, если $\forall n \in \mathbb{N}$ $a_{3n-2} = 1$, $a_{3n-1} = 2$, $a_{3n} = 3$.

г) Найти последовательность (a_n), для которой $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = \sqrt{7}$.

Открытые и замкнутые множества на прямой

Листок 13
октябрь

Определение 1. Точка $x \in M$ (все множества, встречающиеся в данном листке, предполагаются подмножествами $\mathbb{R}$) называется *внутренней точкой* множества M, если существует окрестность точки x, целиком лежащая в M.

Определение 2. Множество называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Задача 1. Пересечение конечного числа открытых множеств открыто.

Задача 2. Объединение любого числа открытых множеств открыто.

Задача 3. Всегда ли пересечение счетного числа открытых множеств открыто?

Задача 4*. Всякое открытое множество есть либо прямая, либо объединение не более чем счетного числа попарно непересекающихся интервалов и открытых лучей.

Определение 3. Точка x называется *предельной точкой* множества M, если любая окрестность точки x содержит хотя бы одну точку множества M, отличную от x. Множество предельных точек множества M обозначается M'.

Задача 5. Всегда ли предельная точка последовательности (x_i) является предельной точкой множества $\{x_i \mid i \in \mathbb{N}\}$?

Определение 4. Точка x называется *предельной точкой* множества M, если существует сходящаяся к x последовательность точек множества $M \setminus \{x\}$.

Задача 6. Определения 3 и 4 равносильны.

Определение 5. Точка $x \in M$ называется *изолированной точкой* множества M, если существует окрестность точки x, не содержащая других точек множества M.

Задача 7. Всякая точка множества M является или предельной, или изолированной точкой M.

Задача 8. Если ограниченное множество M бесконечно, то M' непусто.

Определение 6. Множество M называется *замкнутым*, если оно содержит все свои предельные точки.

Задача 9. Объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Задача 10. Пересечение любого числа замкнутых множеств замкнуто.

Задача 11. Всегда ли объединение счетного числа замкнутых множеств замкнуто?

Задача 12. Конечное множество замкнуто.

Задача 13. Множество предельных точек множества замкнуто.

Задача 14. Какие множества являются открытыми и замкнутыми одновременно?

Задача 15. Дополнение к открытому множеству замкнуто; дополнение к замкнутому множеству открыто.

Задача 16. Пусть множество A открыто, множество B замкнуто. Можно ли утверждать, что множества $A \cap B$, $A \cup B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ открыты или замкнуты?

Определение 7. Множество $\overline{M} = M \cup M'$ называется *замыканием* множества M.

Задача 17. Если M замкнуто, то $\overline{M} = M$.

Задача 18. Замыкание любого множества замкнуто.

Задача 19. Замыкание множества M есть пересечение всех замкнутых множеств, содержащих M.

Определение 8. Множество M называется
1) *плотным в себе*, если $M \subset M'$;
2) *совершенным*, если $M = M'$;
3) *всюду плотным*, если $M' = \mathbb{R}$.

Задача 20. Множество плотно в себе, если и только если у него нет изолированных точек.

Задача 21. Множество совершенно, если и только если оно замкнуто и плотно в себе.

Задача 22. Указать, являются ли следующие множества открытыми, замкнутыми, плотными в себе, совершенными или всюду плотными:
а) $\varnothing$; б) конечное множество; в) $\mathbb{Z}$; г) $]a,b[$; д) $[a,b]$;
е) $\mathbb{R}$; ж) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$; з) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$; и) $\mathbb{Q}$.

Задача 23*. Может ли совершенное множество быть счетным?

Функции: свойства и графики

Листок 14
ноябрь

Определение 1. Пусть $M\subset\mathbb{R}$. Отображение $f\colon M\to\mathbb{R}$ называется *функцией* на множестве M. Множество M называется *областью определения* функции f. Множество $f(M)$ называется *множеством значений* функции f.

Определение 2. Функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ называется ограниченной, если множество ее значений ограничено.

Задача 1. Пусть f, g, h — функции на отрезке $[a,b]$, причем f и g ограничены, h не ограничена, множества значений функций g и h не содержат ноль. Что можно сказать об ограниченности следующих функций: $f+g$, $f+h$, fg, fh, f/g, f/h?

Определение 3. Функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ называется *монотонно возрастающей* (*неубывающей, невозрастающей, убывающей*) на множестве $X\subset M$, если для любых $x_1,x_2\in X$, таких что $x_1<x_2$, выполняется условие $f(x_1)<f(x_2)$ $(f(x_1)\leqslant f(x_2),\ f(x_1)\geqslant f(x_2),\ f(x_1)>f(x_2))$. Функция называется *монотонной*, если она монотонно неубывающая или монотонно невозрастающая.

Задача 2. Исследовать на монотонность следующие функции и построить их графики:
а) $ax+b$; б) ax^2+bx+c; в) $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

Определение 4. Множество $M\subset\mathbb{R}$ называется *симметричным* (относительно нуля), если для любого $x\in M$ верно, что $-x\in M$.

Определение 5. Функция $f\colon M\to\mathbb{R}$ называется *четной* (*нечетной*), если множество M симметрично и для всякого $x\in M$ выполняется условие $f(-x)=f(x)$ $(f(-x)=-f(x))$.

Задача 3. Доказать, что график четной (нечетной) функции симметричен относительно оси Oy (начала координат).

Задача 4. Выяснить, какие из следующих функций четные, а какие нечетные, и построить их графики:
а) $x\cdot|x|$; б) $|x+1|-|x-1|$; в) $|x+1|+|x-1|$; г) $3x-x^3$.

Задача 5. Доказать, что всякая функция на симметричном множестве единственным образом представима в виде суммы четной и нечетной функции.

Задача 6. По данному графику функции $f(x)$ построить графики следующих функций:
а) $|f(x)|$; б) $f(|x|)$; в) $|f(|x|)|$; г) $f(x+b)$;
д) $f(ax)$; е) $f(ax+b)$; ж) $f(x)+c$; з) $af(x)+b$.

Задача 7. Исследовать следующие функции и построить их графики:

а) $f(x)=\begin{cases}1, & \text{если } x\leqslant 0,\\ (x-1)^2, & \text{если } x>0;\end{cases}$ б) $f(x)=\begin{cases}|x|, & \text{если } |x|\leqslant 1,\\ 2-x^2, & \text{если } |x|>1;\end{cases}$

в) $\dfrac{1}{|x|}$; г) $\dfrac{|x|}{|x+1|}$; д) $\dfrac{2|x|}{1+x^2}$; е) $x+\frac{1}{x}$; ж) $x^2-\frac{1}{x}$;

з) $\dfrac{1}{x^2+bx+1}$; и) $-x^3-2x^2-x$; к) $\sqrt{x+1}-\sqrt{|x|}$;

л) $\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}$; м) $\dfrac{x^2}{\sqrt{2+x^2}}$; н) $\{x\}-2\{x\}^2-[x]$; о) $\dfrac{[x]}{\{x\}}$.

Задача 8. По данному графику функции $f(x)$ построить графики следующих функций:
а) $f^2(x)$; б) $\sqrt{f(x)}$; в) $\dfrac{1}{f(x)}$; г) $2^{f(x)}$; д) $[f(x)]$.

Задача 9. Изобразить на плоскости множество точек, координаты которых удовлетворяют следующим соотношениям:
а) $xy>1$; б) $x^2>4-y^2$; в) $xy^2=|x|$; г) $|2x-y|=|x+2y|$;
д) $x^2+xy^2=0$; е) $|x-y|>2$; ж) $(2x+y)^{10}<1$;
з) $(x^2-3y^2)(x^3+1)\geqslant 0$; и) $|x|+y=|y^2+x|$.

Предел функции

Листок 15
январь

Определение 1. Множество $\dot{U}_\varepsilon(a) = U_\varepsilon(a) \setminus \{a\}$ называется *проколотой ε-окрестностью* точки a.

Определение 2. Пусть функция f определена на множестве M и точка a является предельной точкой этого множества. Число b называется *пределом* функции f в точке a, если для любой последовательности (x_n) элементов множества $M \setminus \{a\}$, сходящейся к a, последовательность $(f(x_n))$ сходится к b. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$ (или $f(x) \to b$ при $x \to a$).

Определение 3. Пусть функция f определена на множестве M и точка a является предельной точкой этого множества. Число b называется *пределом* функции f в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in \dot{U}_\delta(a) \cap M$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(b)$.

Задача 1. Доказать равносильность определений 2 и 3.

Задача 2. Доказать единственность предела.

Определение 4. Пусть функция f определена на множестве M и точка a является предельной точкой множества $M \cap \{x \mid x < a\}$. Число b называется *пределом слева* функции f в точке a, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что $\forall x \in]a-\delta, a[\cap M$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(b)$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to a-0} f(x) = b$.

Задача 3. Сформулировать определение предела справа.

Определение 5. Пусть функция f определена на неограниченном множестве M. Число b называется *пределом* функции f при x, стремящемся к ∞, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists c > 0$ такое, что $\forall x \in M$ из $|x| \geqslant c$ следует $f(x) \in U_\varepsilon(b)$. Обозначение: $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b$.

Задача 4. Сформулировать определения предела функции f при x, стремящемся к $+\infty$ $(-\infty)$.

Задача 5. Перевести определения 3 и 5 с «языка окрестностей» на «язык модулей».

Задача 6. Пусть функция f имеет предел слева и предел справа в точке a. Доказать, что предел $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ существует тогда и только тогда, когда

$$\lim_{x\to a-0} f(x) = \lim_{x\to a+0} f(x).$$

Задача 7. Доказать, что а) $\lim\limits_{x\to 1}(2x+1) = 3$; б) $\lim\limits_{x\to 3} x^2 = 9$.

Задача 8. Привести пример функции на $\mathbb{R}$, которая в точке a:
а) не имеет предела ни слева, ни справа;
б) имеет предел слева, но не имеет предела справа;
в) имеет разные пределы слева и справа.

Определение 6. Функция f называется *бесконечно малой* в точке a, если предел этой функции в точке a равен нулю.

Задача 9. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = b$ тогда и только тогда, когда функция f представима в виде $f(x) = g(x) + b$, где функция g — бесконечно малая в точке x_0.

Задача 10. Пусть области определения функций f и g совпадают, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = a$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = b$. Тогда
а) $\forall c \in \mathbb{R}$ $\lim\limits_{x\to x_0} cf(x) = ca$; б) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x) \pm g(x)) = a \pm b$;
в) $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)g(x)) = ab$; г) если $b \neq 0$, то $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$.

Задача 11. Найти а) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+3x^4}{3x^2+x^4}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x^2+3x^4}{3x^2+x^4}$.

Задача 12. Пусть функции f, g и h определены на множестве M, для любого $x \in M$ имеют место неравенства $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} h(x) = b$. Тогда $\lim\limits_{x\to a} g(x) = b$.

Задача 13. Функция, монотонная на интервале $]a, b[$, имеет предел как слева, так и справа в каждой точке этого интервала.

Задача 14. Дать определение функции, стремящейся к бесконечности при x, стремящемся к a.

Задача 15. Пусть функция f не обращается в ноль в некоторой окрестности точки a. Доказать, что $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{1}{f(x)} = 0$.

Задача 16*. Пусть f и g — взаимно обратные функции на $\mathbb{R}$, и $\lim\limits_{x\to a} f(x) = b$. Обязательно ли $\lim\limits_{x\to b} g(x) = a$?

Непрерывность функции

Листок 16
январь

Определение 1. Функция f, определенная на множестве M, называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если a — изолированная точка множества M или $\lim\limits_{x\to a} f(x)=f(a)$.

Определение 2. Функция f, определенная на множестве M, называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если для любой последовательности (x_n) элементов M, сходящейся к a, выполняется условие $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n)=f(a)$.

Определение 3. Функция f, определенная на множестве M, называется *непрерывной в точке* $a \in M$, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$ такое, что для любого $x \in U_\delta(a) \cap M$ выполняется условие $f(x) \in U_\varepsilon(f(a))$.

Задача 1. Определения 1, 2 и 3 эквивалентны.

Задача 2. Дать определение функции, непрерывной справа (слева) в точке.

Определение 4. Функция, определенная на множестве M, называется *непрерывной на множестве* M, если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Определение 5. Функция f, определенная на множестве M, называется *разрывной в точке* $a \in M$, если она не является непрерывной в a.

Задача 3. Сформулировать определение разрывности функции в точке на языке ε-δ.

Задача 4. Доказать, что следующие функции непрерывны:
а) $f(x)=c$; б) $f(x)=|x|$; в) $f(x)=\sqrt{x}$; г) $f(x)=\dfrac{1}{x-2}$.

Задача 5. Привести пример функции на $\mathbb{R}$, которая
а) разрывна ровно в одной точке;
б) всюду разрывна;
в) непрерывна ровно в одной точке;
г) разрывна в точках вида $1/n$, где $n \in \mathbb{N}$, и только в них.

Задача 6. Пусть функция непрерывна и положительна (отрицательна) в точке a. Тогда она положительна (отрицательна) в некоторой окрестности точки a.

Задача 7. Пусть функции $f: M \to \mathbb{R}$ и $g: M \to \mathbb{R}$ непрерывны в точке a. Тогда функции $f \pm g$, fg и f/g $(g(a) \neq 0)$ также непрерывны в a.

Задача 8. Исследовать на непрерывность следующие функции:
а) $f(x)=\operatorname{sign}(x)$; б) $f(x)=\{x\}$; в) $f(x)=\dfrac{[x]}{x}$;
г) $f(x)=\begin{cases} 1/x & \text{при } |x|>1, \\ x^2 & \text{при } |x|\leqslant 1. \end{cases}$

Задача 9. а) Пусть функция φ непрерывна в точке a, а функция f непрерывна в точке $b=\varphi(a)$. Тогда функция $f\circ\varphi$ непрерывна в точке a.
б) Композиция непрерывных функций непрерывна.

Задача 10. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и $f(a) < 0 < f(b)$. Доказать, что найдется такое $c \in [a,b]$, что $f(c)=0$.

Задача 11. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда $\forall y \in [f(a), f(b)]$ $([f(b), f(a)])$ $\exists x \in [a,b]\ \ f(x)=y$.

Задача 12. Верно ли, что для монотонных функций справедливо утверждение, обратное утверждению задачи 11, то есть из условия $\forall y \in [f(a), f(b)]\ \exists x \in [a,b]\ \ f(x)=y$ следует, что функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$?

Задача 13. Пусть P — многочлен нечетной степени. Доказать, что найдется такое $a \in \mathbb{R}$, что $P(a)=0$.

Задача 14. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$. Доказать, что
а) функция f ограничена на $[a,b]$;
б) для любого замкнутого множества $M \subset [a,b]$ его образ $f(M)$ замкнут.

Задача 15. Пусть функция f определена и непрерывна на отрезке $[a,b]$. Тогда она достигает на нем своих точных нижней и верхней граней, то есть $\exists c \in [a,b]\ \ f(c)=\inf f([a,b])$ и $\exists C \in [a,b]\ \ f(C)=\sup f([a,b])$.

Задача 16. Привести пример
а) ограниченной функции на $[0,1]$;
б) ограниченной непрерывной функции на $\mathbb{R}$,
которая не достигала бы на области определения своих точных верхней и нижней граней.

Задача 17*. Доказать, что монотонная функция имеет не более чем счетное число точек разрыва.

Задача 18*. Существует ли функция на $\mathbb{R}$, которая
а) разрывна на $\mathbb{Q}$ и непрерывна на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$;
б) непрерывна на $\mathbb{Q}$ и разрывна на $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$?

Задача 19*. Существует ли всюду разрывная функция на $\mathbb{R}$, имеющая предел в каждой точке?

Равномерная непрерывность и сходимость

Листок 17
февраль

Определение 1. Функция $f: M \to \mathbb{R}$ называется *равномерно непрерывной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$, для которого при любых $x_1, x_2 \in M$, таких что $|x_1 - x_2| < \delta$, выполняется условие $|f(x_1) - f(x_2)| < \varepsilon$.

Задача 1. Являются ли следующие функции равномерно непрерывными:
а) $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{x}$; б) $f:]0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$;
в) $f: [0, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x}$; г) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$;
д) $f: [1, +\infty[\to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^3 - 1}$; е) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$?

Задача 2. Верно ли, что равномерно непрерывная функция непрерывна?

Задача 3. Непрерывная функция на отрезке равномерно непрерывна.

Задача 4. Доказать, что утверждение задачи 3 неверно для интервала.

Задача 5. Пусть f и g — равномерно непрерывные функции на $\mathbb{R}$. Верно ли, что функции $f + g$ и fg равномерно непрерывны?

Задача 6. Пусть $f: X \to \mathbb{R}$ — равномерно непрерывная функция. Доказать, что существует и единственна такая непрерывная функция $h: \overline{X} \to \mathbb{R}$, что $h(x) = f(x)$ при всех $x \in X$.

Определение 2. Функция $f: E \to \mathbb{R}$ называется *равномерным пределом* последовательности функций $f_n: E \to \mathbb{R}$, если выполняется условие $\forall \varepsilon > 0\ \exists k \in \mathbb{N}\ \forall n > k\ \forall x \in E\ \ |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$. Говорят, что последовательность (f_n) *равномерно сходится* к f. Обозначение: $f = \lim\limits_{n\to\infty} f_n$ или $f_n \rightrightarrows f$ при $n \to \infty$.

Задача 7. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ и $g_n \rightrightarrows g$ при $n \to \infty$. Верно ли, что существуют равномерные пределы последовательностей $(f_n + g_n)$ и $(f_n g_n)$?

Задача 8. Пусть функции f_n и f определены на множестве E и непрерывны. Предположим, что $\forall x \in E\ \ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ (последовательность (f_n) сходится к f *поточечно*). Обязательно ли $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$, если а) $E = \mathbb{R}$; б) $E = [0, 1]$?

Задача 9*. Пусть $f_n \rightrightarrows f$ и функции f_n непрерывны. Доказать, что функция f непрерывна.

Задача 10*. Существует ли непрерывная функция на $\mathbb{R}$, не монотонная ни на каком интервале?

Показательная, логарифмическая и степенная функции

Листок 18
март

Определение 1. Функция $g: A \to \mathbb{R}$ называется *обратной* к функции $f: B \to \mathbb{R}$, если $f(g(x)) = x$ при всех $x \in A$ и $g(f(x)) = x$ при всех $x \in B$. Функция, для которой существует обратная, называется *обратимой*.

Задача 1. Доказать, что функция обратима тогда и только тогда, когда ее значения в различных точках области определения различны.

Задача 2. Доказать, что всякая возрастающая (убывающая) функция обратима, и обратная к ней функция также возрастающая (убывающая).

Определение 2. Множество M называется *связным*, если для любой пары точек $a, b \in M$ таких, что $a < b$, выполнено условие $[a, b] \subset M$.

Задача 3. Описать все связные множества.

Задача 4. Пусть f — непрерывная функция на связном множестве M. Доказать, что множество ее значений связно.

Задача 5. Доказать, что монотонная функция на связном множестве непрерывна тогда и только тогда, когда множество ее значений связно.

Определение 3. Функция $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto a^x$, где $a > 0$, называется *показательной функцией* с основанием a.

Задача 6. Исследовать показательную функцию на монотонность и обратимость.

Задача 7. Доказать, что показательная функция непрерывна.

Задача 8. Построить графики показательных функций с основаниями $\frac{1}{2}$, 1, 2, 10.

Определение 4. Функция, обратная к показательной функции с основанием a, где $a \neq 1$, называется *логарифмической функцией* с основанием a. Ее значение в точке x обозначается $\log_a x$ и называется *логарифмом* числа x по основанию a.

Задача 9. Доказать, что логарифмическая функция определена на множестве положительных чисел.

Задача 10. Доказать, что логарифмическая функция монотонна.

Задача 11. Доказать, что логарифмическая функция непрерывна.

Задача 12. Пусть $a>0$, $a\neq 1$. Верно ли, что при любом $x\in\mathbb{R}$
а) $x=\log_a a^x$; б) $x=a^{\log_a x}$?

Задача 13. Пусть числа a, b, x, y положительны, $a, b\neq 1$, $c\neq 0$. Доказать, что
а) $\log_a(xy)=\log_a x+\log_a y$; б) $\log_a \frac{x}{y}=\log_a x-\log_a y$;
в) $\log_a x^d=d\log_a x$; г) $\log_{a^c} x=\frac{1}{c}\log_a x$; д) $\log_b a\cdot\log_a b=1$;
е) $\log_b x=\dfrac{\log_a x}{\log_a b}$.

Задача 14. Построить графики логарифмических функций с основаниями $\frac{1}{2}$, 2, 10.

Определение 5. Функция $f(x)=x^a$ называется *степенной функцией* с показателем a.

Задача 15. Найти область определения степенной функции при различных a.

Задача 16. Исследовать степенную функцию на монотонность.

Задача 17. Выяснить, когда степенная функция обратима, и найти обратную к ней функцию.

Задача 18. Доказать, что степенная функция непрерывна.

Задача 19. Построить графики степенных функций $x\mapsto x^a$ для

$$a\in\left\{-2, -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2, 5\right\}.$$

Определение 6. $e=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$.

Задача 20. Доказать, что определение 6 корректно и

$$e=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\lim_{x\to 0}(1+x)^{1/x}.$$

Задача 21. Решить уравнения:
а) $\ln x=2\lg x$; б) $\ln x=\lg x+1$; в) $\ln\lg x=\lg\ln x$,
где $\ln x=\log_e x$ (*натуральный логарифм*), $\lg x=\log_{10} x$ (*десятичный логарифм*).

Задача 22. Пусть $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=a>0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=b$ и области определения функций f, g совпадают. Доказать, что $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)^{g(x)}=a^b$.

Задача 23. Непрерывна ли функция $f(x)=x^x$?

Задача 24. Найти все непрерывные функции на $\mathbb{R}$, удовлетворяющие условию
а) $f(x+y)=f(x)+f(y)$; б)* $f(x+y)=f(x)f(y)$
при всех $x, y\in\mathbb{R}$.

Тригонометрические функции

Листок 19
апрель

<u>Определение 1.</u> *Расстоянием* между точками $A_1=(x_1, y_1)$ и $A_2=(x_2, y_2)$ плоскости $\mathbb{R}^2=\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ называется число

$$|A_1A_2|=\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

<u>Задача 1.</u> $|A_1A_3|\leqslant|A_1A_2|+|A_2A_3|$.

<u>Определение 2.</u> Пусть $A_1=(x_1, y_1)$ и $A_2=(x_2, y_2)$ — такие точки полуокружности $H=\{(x, y)\in\mathbb{R}^2 \mid x^2+y^2=1, y\geqslant 0\}$, что $x_1\leqslant x_2$. *Дугой* $\overset{\frown}{A_1A_2}$ называется множество $\{(x, y)\in H \mid x_1\leqslant x\leqslant x_2\}$.

<u>Определение 3.</u> *Длиной* дуги $\overset{\frown}{A_1A_2}$ называется число

$$|\overset{\frown}{A_1A_2}|=\sup\{|B_1B_2|+|B_2B_3|+\ldots+|B_{n-1}B_n| \mid n\geqslant 2,$$
$$B_i=(x_i, y_i)\in\overset{\frown}{A_1A_2}, x_1\leqslant x_2\leqslant\ldots\leqslant x_n\}.$$

Длина полуокружности H обозначается π.

<u>Задача 2.</u> Определение 3 корректно.

<u>Задача 3.</u> $|\overset{\frown}{A_1A_3}|=|\overset{\frown}{A_1A_2}|+|\overset{\frown}{A_2A_3}|$.

<u>Задача 4.</u> Доказать, что $3<\pi<4$.

<u>Задача 5.</u> Доказать, что для любого числа $t\in[0, \pi]$ найдется такая дуга $\overset{\frown}{A_1A_2}$, что $A_2=(1, 0)$ и $|\overset{\frown}{A_1A_2}|=t$. Число x, такое что $A_1=(x, y)$, называется *косинусом* числа t.

<u>Определение 4.</u> *Косинусом* называется функция $\cos\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, удовлетворяющая следующим условиям:
1) если $t\in[0, \pi]$, то $\cos t$ — это косинус числа t в смысле задачи 5;
2) $\forall t\in\mathbb{R}\quad \cos(t+\pi)=-\cos t$.
Определим функции
синус: $\sin\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $\sin t=\cos\left(\frac{\pi}{2}-t\right)$;
тангенс: $\operatorname{tg}\colon\mathbb{R}\setminus\left\{k\pi+\frac{\pi}{2}\,\middle|\,k\in\mathbb{Z}\right\}\to\mathbb{R}$, $\operatorname{tg}x=\frac{\sin x}{\cos x}$;
котангенс: $\operatorname{ctg}\colon\mathbb{R}\setminus\{k\pi \mid k\in\mathbb{Z}\}\to\mathbb{R}$, $\operatorname{ctg}x=\frac{\cos x}{\sin x}$.
Функции sin, cos, tg, ctg называются *тригонометрическими*.

<u>Задача 6.</u> Определение 4 корректно.

<u>Задача 7.</u> Дать определения синуса, тангенса и котангенса числа $t\in\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$, аналогичные определению косинуса из задачи 5.

<u>Задача 8.</u> Доказать, что $(\sin x)^2+(\cos x)^2=1$.

<u>Задача 9*.</u> Доказать, что $\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y$.

<u>Задача 10.</u> а) $|\sin x|\leqslant|x|$; б) $|\operatorname{tg}x|\geqslant|x|$ при $x\in\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$.

<u>Задача 11.</u> Доказать, что функции sin, cos, tg, ctg непрерывны.

<u>Определение 5.</u> Число c называется *периодом* функции $f\colon M\to\mathbb{R}$, если выполнены следующие условия:
1) $\forall x\in M\quad x+c\in M, x-c\in M$; 2) $\forall x\in M\quad f(x+c)=f(x)$.
Функция называется *периодической*, если у нее есть положительный период.

<u>Задача 12.</u> Если c и d — периоды функции f, то числа $c+d$ и $c-d$ также являются периодами f.

<u>Задача 13.</u> Пусть s — наименьший положительный период периодической функции f. Тогда $\{ks \mid k\in\mathbb{Z}\}$ — множество периодов f.

<u>Задача 14.</u> Пусть у периодической функции f нет наименьшего положительного периода. Тогда множество ее периодов всюду плотно.

<u>Задача 15.</u> Доказать, что у непостоянной непрерывной периодической функции есть наименьший положительный период.

<u>Задача 16.</u> Найти периоды функций sin, cos, tg, ctg.

<u>Определение 6.</u> *Обратные тригонометрические функции* arcsin (*арксинус*), arccos (*арккосинус*), arctg (*арктангенс*), arcctg (*арккотангенс*) — это функции, обратные, соответственно, к следующим:
1) $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\sin x$; 2) $[0, \pi]\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\cos x$;
3) $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\operatorname{tg}x$; 4) $]0, \pi[\to\mathbb{R}$, $x\mapsto\operatorname{ctg}x$.

<u>Задача 17.</u> Доказать, что определение 6 корректно, и найти области определения функций arcsin, arccos, arctg, arcctg.

<u>Задача 18.</u> Доказать, что функции arcsin, arccos, arctg, arcctg непрерывны.

<u>Задача 19.</u> Провести полное исследование и построить графики функций:
а) $\sin x$; б) $\cos x$; в) $\operatorname{tg}x$; г) $\operatorname{ctg}x$;
д) $\arcsin x$; е) $\arccos x$; ж) $\operatorname{arctg}x$; з) $\operatorname{arcctg}x$;
и) $\sin(\arcsin x)$; к) $\cos(\arccos x)$; л) $\operatorname{tg}(\operatorname{arctg}x)$; м) $\operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg}x)$;
н) $\arcsin(\sin x)$; о) $\arccos(\cos x)$; п) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}x)$; р) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{ctg}x)$.

Десятый класс

Числовые ряды

Листок 20
сентябрь

Определение 1. Пусть (a_n) — последовательность действительных чисел. Выражение $a_1 + a_2 + \ldots + a_n + \ldots$ называется *числовым рядом* (обозначение: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$), а числа a_n — *членами ряда*.

Определение 2. Число $S_n = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ называется *n-й частичной суммой* ряда $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$.

Определение 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *сходящимся*, если сходится последовательность (S_n) его частичных сумм. Число $S = \lim\limits_{n\to\infty} S_n$ называется *суммой* ряда (обозначение: $S = \sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$). Ряд называется *расходящимся*, если последовательность частичных сумм не сходится.

Задача 1. Определить, сходится или расходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n$.

Задача 2. Доказать, что если ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, то $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$. Верно ли обратное утверждение?

Задача 3. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится тогда и только тогда, когда последовательность его частичных сумм фундаментальна.

Задача 4. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходятся. Тогда ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + cb_k)$ также сходится, причем $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (a_k + cb_k) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k + c \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$.

Задача 5. Найти суммы следующих рядов:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{2n-1}{2^n}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (n+1)x^n$ $(|x| < 1)$.

Задача 6. Пусть ряды $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ и $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ таковы, что $0 \leqslant a_k \leqslant b_k$ для почти всех k (в этом случае говорят, что ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ *мажорирует* ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$).

Тогда если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится, то сходится и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$; если ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ расходится, то и ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k$ расходится.

Задача 7. Пусть почти все члены сходящегося ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ неотрицательны. Доказать, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, полученный из ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ перестановкой членов, сходится, причем $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Задача 8. Какие из следующих рядов сходятся:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n^2}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n}$;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin(n\alpha)$; е)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \sin\frac{1}{n}$; ж)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \operatorname{tg}\frac{1}{n^2}$?

Задача 9. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ *знакоположителен* (то есть $\forall k\ \ a_k > 0$). Тогда если $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} < 1$ $\left(\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} > 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда в случае $\lim\limits_{k\to\infty} \frac{a_{k+1}}{a_k} = 1$?

Задача 10. Установить, сходятся или расходятся следующие ряды:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot2n}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{e^n}{n!}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n^3}{e^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$; д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$.

Задача 11. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ знакоположителен. Тогда если $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} < 1$ $\left(\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} > 1\right)$, то ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится (расходится). Что можно сказать о сходимости ряда в случае $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = 1$?

Задача 12. Установить, сходятся или расходятся следующие ряды:
а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n+1}{2n-1}\right)^n$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(2n+3)^5}{7^n + 11^n}$; г) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2}$;
д) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}}$.

Определение 4. Ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *абсолютно сходящимся*, если сходится ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Задача 13. Абсолютно сходящийся ряд сходится.

Определение 5. Пусть ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ сходится, а ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|$ расходится. Тогда ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ называется *условно сходящимся*.

Задача 14. Если $a_1 \geqslant a_2 \geqslant \ldots > 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, то *знакопеременный ряд* $a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \ldots$ сходится.

Задача 15. Исследовать на абсолютную и условную сходимость следующие ряды:

а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2}$; б) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{2n^2+n}{n^3+1}\right)$; в) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n^3+1}}$;

г)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \frac{\pi n}{12}}{1+\ln n}$; д)* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$.

Задача 16. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится абсолютно. Доказать, что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$, полученный из ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ перестановкой членов, сходится и $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i = \sum\limits_{i=1}^{\infty} b_i$.

Задача 17. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Доказать, что ряд, составленный из положительных (отрицательных) членов данного ряда, стремится к $+\infty$ $(-\infty)$.

Задача 18. Пусть ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится условно. Тогда его можно превратить перестановкой членов как в расходящийся ряд, так и в сходящийся с произвольной наперед заданной суммой.

Задача 19. а) Доказать, что ряд $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ сходится условно.

б)* Переставить члены данного ряда таким образом, чтобы получился расходящийся ряд.

Задача 20*. Существует ли такая последовательность (a_i), что ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i$ сходится, а ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty} a_i^3$ расходится?

Задача 21*. Доказать, что числа а) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^{-n^2}$; б) e иррациональны.

Задача 22*. Пусть ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$ сходится. Доказать, что для любой монотонной ограниченной последовательности (x_k) ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k a_k$ сходится.

Дифференцирование, ч. 1

Листок 21
сентябрь

Определение 1. Пусть область определения функции f включает окрестность точки x_0. Функция f называется *дифференцируемой в точке* x_0, если существует предел $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ (называемый *производной* функции f в точке x_0). Обозначения: $\dfrac{df}{dx}(x_0)$, $f'(x_0)$.

Задача 1. Если функция дифференцируема в точке x_0, то она и непрерывна в этой точке, то есть непрерывность функции является необходимым условием ее дифференцируемости.

Определение 2. Функция называется *дифференцируемой на множестве* M, если она дифференцируема в каждой точке этого множества. В этом случае функция $g\colon M\to\mathbb{R}$, $g(x)=f'(x)$ называется *производной функции* f *на множестве* M. Обозначения: $\dfrac{df}{dx}$, f'.

Задача 2. Найти производные следующих функций:
а) c; б) x; в) x^2; г) $\frac{1}{x}$; д) $\sqrt{x}$.

Задача 3. Пусть функции u и v дифференцируемы на множестве M. Тогда
а) $\forall c\in\mathbb{R}$ $(cu)'=cu'$; б) $(u+v)'=u'+v'$; в) $(u\cdot v)'=u'\cdot v+u\cdot v'$;
г) если $v(x_0)\neq 0$, то $\left(\frac{u}{v}\right)'(x_0)=\dfrac{u'(x_0)v(x_0)-u(x_0)v'(x_0)}{v^2(x_0)}$.

Задача 4. Найти производные следующих функций, построить их графики и графики их производных:
а) $3x^3+2x^2-4x-1$; б) $x^n, n\in\mathbb{Z}$; в) $|x-2|$; г) $x+\frac{1}{x}$; д) $\dfrac{x^2+7x-14}{x+3}$.

Задача 5. Пусть

$$f(x)=\begin{cases} x^2, & \text{если } x\leqslant x_0,\\ \alpha x+\beta, & \text{если } x>x_0.\end{cases}$$

При каких α и β функция f а) непрерывна; б) дифференцируема?

Задача 6. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0, а функция g дифференцируема в точке $y_0=f(x_0)$. Тогда функция $h=g\circ f$ дифференцируема в точке x_0, причем $h'(x_0)=g'(y_0)f'(x_0)$.

Задача 7. Найти производные следующих функций:
а) $(2x^2-5x+4)^5$; б) $\sqrt{1-x^2}$; в) $\dfrac{(2x+1)^2}{(3x-2)^3}$.

Определение 3. Пусть функция f определена в окрестности точки x_0. Прямая K называется касательной к графику функции f в точке $(x_0,f(x_0))$, если $\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{\rho(x)}{x-x_0}=0$, где $\rho(x)$ — расстояние от точки $(x,f(x))$ до прямой K.

Задача 8. Пусть функция f дифференцируема в точке x_0. Тогда прямая

$$y=f'(x_0)(x-x_0)+f(x_0)$$

является касательной к графику f в точке $(x_0,f(x_0))$.

Задача 9. Нарисовать эскиз графика f' по заданной графиком функции f.

Задача 10. Пусть функция f определена на интервале $]a,b[$ и в точке $x_0\in\,]a,b[$ принимает наибольшее или наименьшее значение на $]a,b[$. Тогда, если производная $f'(x_0)$ существует, то она равна нулю.

Задача 11. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, дифференцируема на интервале $]a,b[$ и $f(a)=f(b)$, то найдется такое $c\in\,]a,b[$, что $f'(c)=0$.

Задача 12. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дифференцируема на интервале $]a,b[$, то существует такое $c\in\,]a,b[$, что $f(b)-f(a)=f'(c)(b-a)$. Каков геометрический смысл этого утверждения?

Задача 13*. Пусть непрерывная функция $f\colon[0,1]\to\mathbb{R}$ дифференцируема на интервале $]0,1[$, причем $f(0)=f(1)=0$ и $\sup\limits_{x\in[0,1]}f(x)=1$. Доказать, что найдется такая точка $x_0\in\,]0,1[$, что $|f'(x_0)|>2$.

Задача 14*. Пусть функция f дифференцируема на отрезке $[a,b]$ (то есть она дифференцируема на интервале $]a,b[$ и существуют односторонние производные $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$). Тогда функция f' принимает на отрезке $[a,b]$ все промежуточные значения между $f'_+(a)$ и $f'_-(b)$.

Задача 15. Привести пример функции, дифференцируемой ровно в одной точке.

Задача 16*. Существует ли непрерывная функция на $\mathbb{R}$, которая нигде не дифференцируема?

Касательная

Листок 22
октябрь

Задача 1. Найти уравнение касательной к графику функции $\frac{x^7-10x}{x+5}$ в точке с абсциссой 1.

Задача 2. Найти уравнение касательной к параболе $y=2x^2-x+5$, параллельной прямой $y=x+1$.

Задача 3. Прямые $a_1x+b_1y=c_1$ и $a_2x+b_2y=c_2$ перпендикулярны, если и только если $a_1a_2+b_1b_2=0$.

Задача 4. Найти уравнение касательной к параболе $y=-x^2+7x-1$, перпендикулярной прямой $y=2x-3$.

Задача 5. Найти уравнение касательной к параболе $y=x^2$, проходящей через точку а) $(0,0)$; б) $(2,3)$; в) $(2,1)$; г) $(1,2)$.

Задача 6. Найти уравнение общих касательных к параболам $y=2x^2-x+5$ и $y=-x^2+7x-1$.

Задача 7. Для каких прямых на плоскости и в каком количестве найдутся параллельные им касательные к графику функции f, где
а) $f(x)=x^2$; б) $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$; в)* $f(x)=x^7-x$.

Задача 8. Для каких точек на плоскости и в каком количестве найдутся проходящие через них касательные к графику функции f, где
а) $f(x)=x^2$; б)* $f(x)=x^n, n\in\mathbb{N}$; в)* $f(x)=x^7-x$.

Определение 1. *Нормалью* к графику функции f в точке $(x,f(x))$ называется проходящая через эту точку прямая, перпендикулярная касательной в этой точке.

Задача 9. Найти все нормали к параболе $y=x^2$, проходящие через точку
а) $(0,0)$; б) $(0,-1)$; в) $(0,1)$.

Задача 10*. Для каких точек на плоскости и в каком количестве найдутся проходящие через них нормали к параболе $y=x^2$?

Дифференцирование, ч. 2

Листок 23
октябрь

Задача 1. Пусть функция f дифференцируема на интервале $]a,b[$. Доказать, что f не убывает (не возрастает) на $]a,b[$ тогда и только тогда, когда ее производная на $]a,b[$ неотрицательна (неположительна).

Задача 2. Пусть производная функции f на интервале $]a,b[$ положительна (отрицательна). Доказать, что f возрастает (убывает) на $]a,b[$.

Задача 3*. Сформулировать необходимое и достаточное условие возрастания (убывания) дифференцируемой функции f на интервале $]a,b[$.

Определение 1. Число a называется *точкой локального максимума* (*минимума*) функции f, определенной на множестве M, если существует такое $\delta>0$, что $\forall x\in \dot{U}_\delta(a)\cap M$ выполняется неравенство $f(a)\geqslant f(x)$ ($f(a)\leqslant f(x)$). Если при этом имеет место строгое неравенство $f(a)>f(x)$ ($f(a)<f(x)$), то число a называется *точкой строгого локального максимума* (*минимума*). Точки (строгого) локального максимума и минимума называются *точками* (*строгого*) *локального экстремума*.

Задача 4. Пусть функция f определена на отрезке $[a,b]$. Тогда точками ее локального экстремума могут быть только концы отрезка и точки интервала $]a,b[$, в которых производная функции равна нулю или вообще не существует.

Задача 5. Пусть функция f непрерывна в точке a, дифференцируема в проколотой окрестности точки a и ее производная меняет знак при переходе через точку a. Тогда точка a является точкой строгого локального экстремума.

Задача 6. Найти все локальные экстремумы следующих функций:
а) $x^{10}(1-x)^{12}$; б) x^3-6x^2+9x-4; в) $\sqrt{2x-x^2}$;
г) $3x^4-4x^3-6x^2+12x-1$.

Определение 2. Если в точке существует производная $\frac{df'}{dx}$, то она называется *второй производной* (*производной второго порядка*) функции f в точке a. Обозначения: $f''(a)$, $\frac{d^2f}{dx^2}(a)$. Аналогично определяется *производная k-го порядка*. Обозначения: $f^{(k)}(a)$, $\frac{d^kf}{dx^k}(a)$.

Задача 7. Пусть в точке a существуют производные $f'(a)=0$, $f''(a)<0$ ($f''(a)>0$). Тогда функция f имеет в точке a строгий локальный максимум (минимум).

Задача 8. Найти наименьшие и наибольшие значения следующих функций:

а) $x+\frac{1}{x}$ на отрезке $[0{,}01; 90]$; б) $\frac{1}{\sqrt{x^2+5x+11}}$ на отрезке $[-3; 3]$;

в) $\frac{|x-1|}{|x+1|}$ на отрезке $[-0{,}8; 4]$;

г) x^3-3x^2-x+4 на отрезке $[-1{,}28; 3{,}3]$.

Задача 9. В данный круговой сегмент, не превышающий полукруга, вписать прямоугольник с наибольшей площадью.

Задача 10. Перпендикулярно к реке шириной a построен канал шириной b. Какой максимальной длины суда смогут заходить в этот канал? Ширину судна считать нулевой.

Определение 3. Прямая $y=ax+b$ называется *асимптотой* графика функции f, если расстояние от точки графика $(x, f(x))$ до этой прямой стремится к нулю при $x\to+\infty$ или при $x\to-\infty$. Прямая $x=c$ называется асимптотой графика функции f, если $f(x)\to\infty$ при $x\to c$.

Задача 11. Указать способ нахождения уравнения невертикальной асимптоты функции.

Определение 4. Функция f называется *нестрого выпуклой вниз (вверх)* на множестве M, если для любых точек $x, y, z\in M$, таких что $x<y<z$, выполнено условие $f(y)\leqslant g(y)$ ($f(y)\geqslant g(y)$), где g — такая функция вида $g(t)=at+b$, что $g(x)=f(x)$, $g(z)=f(z)$. Если имеют место строгие неравенства $f(y)<g(y)$ ($f(y)>g(y)$), то функция f называется *строго выпуклой вниз* (*вверх*) на множестве M.

Задача 12. Какова геометрическая интерпретация условия выпуклости?

Задача 13. Пусть функция $f\colon [a,c]\to\mathbb{R}$ выпукла вниз на отрезке $[a,b]$ и на отрезке $[b,c]$. Обязательно ли она выпукла вниз на отрезке $[a,c]$?

Задача 14. Пусть функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$ и дважды дифференцируема на интервале $]a,b[$. Доказать, что f нестрого выпукла вниз (вверх) тогда и только тогда, когда ее вторая производная неотрицательна (неположительна) на интервале $]a,b[$.

Задача 15. Провести полное исследование и построить графики следующих функций:

а) $x\sqrt[3]{x-1}$; б) $\frac{2-x^2}{1-x^4}$; в) $3x-x^3$; г) $\frac{x^2-1}{x^2-6x+5}$; д) $\frac{x^4}{(1+x)^3}$;

е) $(x-3)\sqrt{x}$; ж) $\frac{|1+x|^{3/2}}{\sqrt{|x|}}$.

Задача 16*. Доказать, что выпуклая функция $f\colon\mathbb{R}\to\mathbb{R}$

а) непрерывна;

б) дифференцируема всюду, кроме не более чем счетного множества точек.

Задача 17*. Пусть функция $f\colon [a,b]\to\mathbb{R}$ непрерывна и для всякого $x\notin M$ существует и равна нулю производная $f'(x)$. Можно ли утверждать, что f постоянна, если множество M а) счетно; б) имеет меру нуль?

Задача 18*. Число y называется *критическим значением* дифференцируемой функции f, если найдется такое x, что $f(x)=y$ и $f'(x)=0$.

а) Доказать, что множество критических значений дифференцируемой функции с непрерывной производной имеет меру нуль.

б) Может ли это множество быть несчетным?

Производная синуса

Листок 24
декабрь

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$.

Задача 2. Найти производные функций $\sin x$, $\cos x$, $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$.

Задача 3. Пусть функция f определена, непрерывна и монотонна в некоторой окрестности точки a, и пусть существует производная $f'(a)\neq 0$. Доказать, что обратная к f функция g дифференцируема в точке $b=f(a)$, причем $g'(b)=\frac{1}{f'(a)}$.

Задача 4. Найти производные функций $\arcsin x$, $\arccos x$, $\operatorname{arctg} x$, $\operatorname{arcctg} x$.

Задача 5. Найти следующие пределы:
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin 5x}{x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x\operatorname{ctg} 3x)$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\arcsin 7x}{\sin 8x}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\cos x-1}{x^2}$;
д) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\sin x\cdot\arcsin x}{\cos x-\cos 3x}$; е) $\lim\limits_{x\to\pi/2}\frac{\cos x-\cos 3x}{\sin 2x}$; ж) $\lim\limits_{x\to\infty}(\sin\sqrt{x+1}-\sin\sqrt{x})$;
з)* $\lim\limits_{x\to\pi/4}\frac{\cos x+\sin x-\sqrt{2}}{(\cos x-\sin x)(\pi-4x)}$; и)* $\lim\limits_{x\to 3/2}\frac{\operatorname{tg}\pi x^2-\operatorname{ctg}\pi x^2}{\sqrt{3}\sin\frac{\pi}{x}-x}$.

Задача 6. Найти производные функций:
а) $2x^2\sin x+\cos x^2$; б) $\sin^k x\cos x^m$; в) $\sin(\sin(\sin x))$;
г) $\operatorname{tg}\frac{1}{x}-\operatorname{ctg}\frac{1}{x}$; д) $\arccos\frac{1}{x-1}$; е) $\arcsin\frac{x+\sin x}{3}$; ж) $\operatorname{arctg}\sqrt{x^2+1}$;
з) $\operatorname{arcctg}(\operatorname{arctg} x)$.

Задача 7. При каких m и n функция

$$f(x)=\begin{cases}|x|^m\sin x^n, & x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases}$$

дифференцируема в нуле?

Задача 8. Провести полное исследование и построить графики следующих функций:
а) $\sqrt{\sin x+1}$; б) $\cos(\operatorname{arctg} x+1)$; в) $\sec x=\frac{1}{\cos x}$; г) $\operatorname{cosec} x=\frac{1}{\sin x}$.

Определение 1. *Тригонометрическим многочленом* степени n называется функция вида $c+\sum\limits_{k=1}^{n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)$, где $c, a_k, b_k\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$ или $b_n\neq 0$.

Задача 9. Доказать, что сумма и произведение тригонометрических многочленов являются тригонометрическими многочленами.

Задача 10. а) Доказать, что производная тригонометрического многочлена степени n есть тригонометрический многочлен степени n.

б) Верно ли, что если производная функции f есть тригонометрический многочлен степени n, то и f есть тригонометрический многочлен степени n?

Задача 11. Доказать, что тригонометрический многочлен положительной степени не может быть тождественно равным нулю.

Задача 12*. Доказать, что тригонометрический многочлен степени n не более $2n$ раз обращается в нуль на $[0, 2\pi[$.

Задача 13*. Доказать, что тригонометрический многочлен вида $\sum\limits_{k=m}^{n}(a_k\sin kx+b_k\cos kx)$ не менее $2m$ раз обращается в нуль на $[0, 2\pi[$.

Задача 14*. Доказать, что тригонометрический многочлен степени n представим в виде произведения n тригонометрических многочленов степени 1.

Производная экспоненты

Листок 25
декабрь

Задача 1. Доказать, что $\lim\limits_{x\to\infty}\left(1+\frac{a}{x}\right)^x=\lim\limits_{x\to 0}(1+ax)^{1/x}=e^a$.

Задача 2. Найти следующие пределы:
а) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{2x+1}{2x+4}\right)^{2x+3}$; б) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+2}{2x^2+1}\right)^{x^2}$;
в) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^3-5}{x^3+x+1}\right)^{7x^2}$; г) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arcsin x)^{\operatorname{ctg} x}$.

Задача 3. Доказать, что
а) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$.

Задача 4. Пусть $a>0$, $a\neq 1$. Доказать, что
а) $(e^x)'=e^x$, $(a^x)'=a^x\ln a$;
б) $(\ln x)'=\frac{1}{x}$, $(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}$ при $x>0$;
в) $(x^a)'=ax^{a-1}$ при $x>0$.

Задача 5. Провести полное исследование степенной, показательной и логарифмической функций.

Задача 6. Найти производные следующих функций:
а) $e^{e^{e^x}}$; б) $\ln(\ln(\ln(x)))$; в) $2^{3^{\arccos x}}$; г) $\log_3(2^x+x^2)$;
д) $\log_2(\log_{1/3}(\operatorname{arctg} x))$; е) $\log_x \arcsin x$; ж) x^x; з) $\ln(x+\sqrt{1+x^2})$.

Задача 7. Провести полное исследование и построить графики следующих функций:
а) $\operatorname{sh}(x)=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ (гиперболический синус);
б) $\operatorname{ch}(x)=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ (гиперболический косинус);
в) $\operatorname{th}(x)=\frac{\operatorname{sh}(x)}{\operatorname{ch}(x)}$ (гиперболический тангенс);
г) $\operatorname{cth}(x)=\frac{\operatorname{ch}(x)}{\operatorname{sh}(x)}$ (гиперболический котангенс).

Задача 8. Выяснить, при каких a и b существуют пределы и вычислить их:
а) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^a}{b^x}$; б) $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\ln^a x}{x^b}$.

Задача 9. Сколько найдется таких x, что
а) $e^x=100x$; б) $e^x=\ln x^{100}$; в) $e^x=x^{100}$?

Задача 10. Провести полное исследование и построить графики функций:
а) $\log_x a$; б) $\lg\cos x$; в) xe^{-x}; г) $2^{\frac{1}{x^2-x-2}}$; д) $\ln(2^x+3^x)$;
е) $\frac{\ln(1+x)}{x}$; ж) x^x; з) $x^{1/x}$; и) $(1+x)^{1/x}$.

Задача 11. Найти пределы (в тех случаях, когда они существуют):
а) $\lim\limits_{x\to+\infty}(e^{x+1/x}-e^x)$; б) $\lim\limits_{x\to 0}(x+e^x)^{1/x}$; в) $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{\cos x}{\cos\pi x}\right)^{1/x^2}$;
г) $\lim\limits_{x\to+\infty}(\ln(x+\ln x)-\ln x)$; д) $\lim\limits_{n\to\infty}\cos^n\frac{x}{\sqrt{n}}$;
е)* $\lim\limits_{x\to+\infty}(\operatorname{ch} x^{\operatorname{sh} x}-\operatorname{sh} x^{\operatorname{ch} x})$; ж)* $\lim\limits_{x\to+\infty}((\operatorname{ch} x)^{\operatorname{sh} x}-(\operatorname{sh} x)^{\operatorname{ch} x})$.

Задача 12*. Доказать, что непостоянная функция вида $\sum\limits_{i=1}^{k}a_ie^{\lambda_i x}$ принимает любое значение не более k раз.

Задача 13*. Для каких $a>0$ найдется такое положительное $b\neq a$, что $a^b=b^a$?

Задача 14*. Пусть $a,b>0$, $f(x)=\left(\frac{a^x+b^x}{2}\right)^{1/x}$.
а) Найти предел $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$.
б) Доказать, что функция f монотонна.

Комплексные числа

Листок 26
февраль

Задача 1. Доказать, что множество $\mathbb{C}=\mathbb{R}^2$ с операциями сложения $(a,b)+(c,d)=(a+c,b+d)$ и умножения $(a,b)\cdot(c,d)=(ac-bd,ad+bc)$ образует поле. Его элементы называются *комплексными числами*.

Задача 2. Обозначим $(a,0)$ через a, $(0,1)$ через i. Доказать, что
а) $(a,b)=a+bi$; б) $i^2=(-i)^2=-1$;
в) $a+bi=c+di$, если и только если $a=c$, $b=d$.

Определение 1. Пусть $z=a+bi$, $a,b\in\mathbb{R}$. Тогда a называется *действительной частью* z, b — *мнимой частью* z, $\sqrt{a^2+b^2}$ — *модулем* z. Обозначения: $a=\operatorname{Re} z$, $b=\operatorname{Im} z$, $\sqrt{a^2+b^2}=|z|$.

Задача 3. Доказать, что
а) $|z_1z_2|=|z_1|\cdot|z_2|$; б) $|z_1|+|z_2|\geqslant|z_1+z_2|$.

Задача 4. Доказать, что для любого $z\neq0$ найдется ровно одно число $\varphi\in[0;2\pi[$ (называемое *аргументом* числа z) такое, что $z=|z|(\cos\varphi+i\sin\varphi)$. Обозначение: $\varphi=\arg z$. Множество $\{\varphi+2\pi n\,|\,n\in\mathbb{Z}\}$ обозначается $\operatorname{Arg} z$.

Определение 2. Отображение $\sigma:\mathbb{C}\to\mathbb{C}, a+bi\mapsto a-bi$ называется *сопряжением*. Обозначение: $\overline{z}=\sigma(z)$.

Задача 5. Доказать, что
а) сопряжение — взаимно однозначное отображение;
б) $\overline{z_1+z_2}=\overline{z_1}+\overline{z_2}$; в) $\overline{z_1z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.

Задача 6. Доказать, что
а) $z\overline{z}=|z|^2$; б) $z+\overline{z}=2\operatorname{Re} z$; в) $z-\overline{z}=2i\operatorname{Im} z$;
г) $\operatorname{Arg}(z_1z_2)=\operatorname{Arg} z_1+\operatorname{Arg} z_2$ (где $A_1+A_2=\{a_1+a_2\,|\,a_1\in A_1, a_2\in A_2\}$).

Задача 7. а) Какие преобразования плоскости $\mathbb{R}^2=\mathbb{C}$ задают отображения $z\mapsto az$, $z\mapsto a\overline{z}$, где $a\in\mathbb{C}\backslash\{0\}$?
б) Доказать, что всякое движение плоскости (изометрия) имеет вид $z\mapsto az+b$ или $z\mapsto a\overline{z}+b$, где $a,b\in\mathbb{C}$, $|a|=1$.

Задача 8. Нарисовать на плоскости множества:
а) $\operatorname{Re} z>\operatorname{Im} z$; б) $\arg(1-z)=\frac{3}{4}\pi$; в) $\overline{z}=iz$; г) $\overline{z}=iz^2$;
д) $\left|\frac{z-2i}{z+4}\right|\geqslant1$; е) $|z-5+2i|=2$; ж) $|z|\cos(\arg z)<1$; з) $\operatorname{Re} z^2>1$;
и) $\operatorname{Im} z^2>1$.

Задача 9. Нарисовать множества и их образы при отображениях:
а) $\left\{z\,\middle|\,\frac{\pi}{4}<\arg z\leqslant\pi, |z|\leqslant\frac12\right\}$, $\{z\,|\operatorname{Re} z=1\}$, $z\mapsto z^2$;
б) $\{z\,|\operatorname{Im} z=1\}$, $\left\{z\,\middle|\,\frac{\pi}{4}\leqslant\arg z\leqslant\frac{\pi}{2}, \operatorname{Im} z<1\right\}$, $z\mapsto\frac{1}{z}$;
в) $\left\{z\,\middle|\,\arg z=\frac{\pi}{4}\right\}$, $\{z\,|\,0\leqslant\arg z\leqslant\pi, |z|<1\}$, $z\mapsto z+\frac{1}{z}$.

Задача 10. а) Доказать, что $z\mapsto\frac{1}{\overline{z}}$ — инверсия с центром в точке 0.
б) В какие множества переводит прямые и окружности отображение $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{C})$?
в) Найти образ множества $\{z\,|\operatorname{Im} z>0\}$ при отображениях $z\mapsto\frac{az+b}{cz+d}$ $(a,b,c,d\in\mathbb{R})$, $z\mapsto\frac{z+q}{z+\overline{q}}$ $(q\in\mathbb{C})$.

Задача 11. а) Доказать, что для любого $a\in\mathbb{C}$ и $n\in\mathbb{N}$ найдется такое $z\in\mathbb{C}$, что $z^n=a$. Число z называется *корнем степени* n из числа a.
б) Сколько существует корней степени n из z? Выразить их через $|z|$ и $\arg z$.
в) Найти сумму и произведение всех корней степени n из 1.

Задача 12. Доказать, что для любых $p,q\in\mathbb{C}$ найдутся такие $z_1,z_2\in\mathbb{C}$, что $x^2+px+q=(x-z_1)(x-z_2)$.

Определение 3. 1) $e^z=e^{\operatorname{Re} z}(\cos(\operatorname{Im} z)+i\sin(\operatorname{Im} z))$;
2) $\sin z=\frac{e^{iz}-e^{-iz}}{2i}$, $\cos z=\frac{e^{iz}+e^{-iz}}{2}$, $\operatorname{tg} z=\frac{\sin z}{\cos z}$, $\operatorname{ctg} z=\frac{\cos z}{\sin z}$;
3) $\operatorname{sh} z=\frac{e^z-e^{-z}}{2}$, $\operatorname{ch} z=\frac{e^z+e^{-z}}{2}$, $\operatorname{th} z=\frac{\operatorname{sh} z}{\operatorname{ch} z}$, $\operatorname{cth} z=\frac{\operatorname{ch} z}{\operatorname{sh} z}$.

Задача 13. а) Найти области определения и периоды функций из определения 3.
б) Доказать, что на $\mathbb{R}$ функции e^z, $\sin z$, $\cos z$ совпадают со стандартными.
в) Доказать, что $e^{z_1+z_2}=e^{z_1}e^{z_2}$, $(e^z)^n=e^{nz}$.
г) Доказать, что $\sin^2 z+\cos^2 z=1$, $\operatorname{ch}^2 z-\operatorname{sh}^2 z=1$.
д) Выразить $\sin(x+y)(\operatorname{sh}(x+y))$ через (гиперболические) синусы и косинусы x и y.
е) Выразить $\sin nx$, $\cos nx$ ($\operatorname{sh} nx$, $\operatorname{ch} nx$) через (гиперболические) синусы и косинусы x.

Задача 14. Найти следующие суммы $(q,\varphi\in\mathbb{R})$:
а) $q\sin\varphi+q^2\sin2\varphi+\ldots+q^n\sin n\varphi$;
б) $q\cos\varphi+q^2\cos2\varphi+\ldots+q^n\cos n\varphi$.

Задача 15. Нарисовать на плоскости множества и их образы при отображениях:

а) $\{z \mid 0<\operatorname{Im} z<2\pi\}$, $\left\{z \,\middle|\, -\frac{\pi}{4}<\operatorname{Im} z\leqslant\frac{\pi}{2}, \operatorname{Re} z<1\right\}$, $z\mapsto e^z$;

б) $\left\{z \,\middle|\, \operatorname{Im} z=\frac{\pi}{6}\right\}$, $\left\{z \,\middle|\, \operatorname{Re} z=\frac{\pi}{6}\right\}$, $z\mapsto \sin z$.

Задача 16*. а) Дать определение непрерывной комплекснозначной функции $U\to\mathbb{C}$, где $U\subset\mathbb{C}$. б) Доказать непрерывность суммы, произведения, частного, композиции непрерывных комплекснозначных функций.

Задача 17*. а) Дать определение производной комплекснозначной функции $U\to\mathbb{C}$, где $U\subset\mathbb{C}$. б) Найти производные суммы, произведения, частного, композиции дифференцируемых функций.

Задача 18*. В каких точках непрерывны (дифференцируемы) следующие функции:

а) z^n; б) $\operatorname{Re} z$; в) $\operatorname{Im} z$; г) $\arg z$; д) $|z|$; е) $\overline{z}$; ж) $|z|^2$?

Задача 19*. Найти производные функций из определения 3.

Задача 20*. Доказать, что $e^z=\sum\limits_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!}=\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{z}{n}\right)^n$.

Формула Тейлора

Листок 27
апрель

Определение 1. Функция f, определенная на $M\subset\mathbb{R}$, называется *k-гладкой*, если существуют и непрерывны на M ее производные $f', f'', \ldots, f^{(k)}$. Множество таких функций обозначается $C^k(M)$. Функции из множества $C^\infty(M)=\bigcap\limits_{i=1}^{\infty}C^i(M)$ называются *бесконечно гладкими*.

Задача 1. а) Если $f, g\in C^n(M)$, то

$$(fg)^{(n)}(x)=f^{(n)}(x)g(x)+nf^{(n-1)}(x)g'(x)+\ldots+C_n^k f^{(n-k)}(x)g^{(k)}(x)+\ldots$$
$$\ldots+f(x)g^{(n)}(x);$$

б)* вывести аналогичную формулу для композиции двух функций.

Задача 2. Пусть $f, g\in C^n(M)$. Тогда

а) $f\pm g\in C^n(M)$; б) $fg\in C^n(M)$;

в) если $g(x)\neq 0$ при $x\in M$, то $\frac{1}{g}\in C^n(M)$;

г) если $g(x)\neq 0$ при $x\in M$, то $\frac{f}{g}\in C^n(M)$.

Задача 3*. Верно ли, что

а) композиция n-гладких функций — n-гладкая функция;

б) функция, обратная к n-гладкой функции с не обращающейся в нуль производной, n-гладкая?

Задача 4. Найти классы гладкости следующих функций:

а) x^n; б) $\sin x$; в) $\operatorname{ctg} x$; г) $|x|^n$; д) $\frac{\sin x-e^x}{10+x^2+\cos x}$;

е) $|x|\cos x$; ж) $|x|\sin x$; з)* $|x|^{x^{10}}$; и)* $\operatorname{arctg}\cos x$;

к)* $\begin{cases} x^m\sin x^{-n} & \text{при } x\neq 0\ (m,n\in\mathbb{N}),\\ 0 & \text{при } x=0;\end{cases}$ л)* $\begin{cases} e^{-1/x} & \text{при } x>0,\\ 0 & \text{при } x\leq 0;\end{cases}$

м)* $\begin{cases} (1+x)^{1/x} & \text{при } x\in]-1,0[\cup]0,+\infty[,\\ e & \text{при } x=0.\end{cases}$

Определение 2. Пусть f и g — функции на $\dot{U}_\varepsilon(x_0)$. Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=0$, то говорят, что f есть «*о-малое*» от g при $x\to x_0$ (обозначение: $f=o(g)$). Если $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=1$, то функции f и g называются *эквивалентными* при $x\to x_0$ (обозначение: $f\sim g$).

Задача 5. Доказать, что (при $x \to x_0$)

а) если $f_1 = o(g)$ и $f_2 = o(g)$, то $f_1 \pm f_2 = o(g)$;

б) если $f = o(g)$ и $g = o(h)$, то $f = o(h)$;

в) если $f_1 = o(g_1)$ и $f_2 = o(g_2)$, то $f_1 f_2 = o(g_1 g_2)$;

г) f бесконечно малая тогда и только тогда, когда $f = o(1)$;

д) если f и g — не обращающиеся в нуль бесконечно малые, то $fg = o(f)$ и $fg = o(g)$.

Задача 6. а) Пусть $f \sim g$. Тогда $f - g = o(f)$, $f - g = o(g)$.

б) Пусть $f \sim gf_1$, g — ограниченная функция. Если $h = o(f)$, то $h = o(f_1)$.

в) Пусть $f = o(g)$. Тогда $f + g \sim g$;

г) Пусть $f_1 \sim g_1$, $f_2 \sim g_2$. Верно ли, что $f_1 + f_2 \sim g_1 + g_2$, $f_1 f_2 \sim g_1 g_2$, $\frac{f_1}{f_2} \sim \frac{g_1}{g_2}$?

Задача 7. Доказать, что при $x \to 0$

а) $\sin x \sim x$; б) $\operatorname{arctg} x \sim x$; в) $e^x - 1 \sim x$;

г) $\ln(1+x) \sim x$; д) $(1+x)^\alpha - 1 \sim \alpha x$; е) $1 - \cos x \sim \frac{x^2}{2}$.

Задача 8. Если при $x \to x_0$ $f \sim g$, $g(x) = A(x - x_0)^m$, то g называется *степенной главной частью* функции f при $x \to x_0$. Доказать, что

а) если степенная главная часть существует, то она единственна;

б) если у f и g есть степенные главные части при $x \to x_0$, то они совпадают тогда и только тогда, когда $f \sim g$ при $x \to x_0$.

Задача 9. Выделить (если это возможно) из следующих функций степенные главные части при $x \to 0$ и установить, какие из этих функций эквивалентны при $x \to 0$: 1, x, $\frac{1}{x}$, $\sin 2x$, $\sqrt{1+4x} - 1$, $|x|$, $\frac{1}{1-x^2}$, $\frac{\operatorname{tg} 2x + \sin 3x}{1-x}$, $\cos 2x - e^{3x}$, $\sin 5x + \ln(1+x)$, $\operatorname{ctg} x + 10$.

Задача 10. Найти следующие пределы:

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)\operatorname{tg} 5x - x^2}{x \sin 2x}$; б) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{\ln x \operatorname{arctg} x}{\sin \pi x^2 + 1 - x^2}$.

Задача 11*. Пусть $f \sim g$ при $x \to x_0$, $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = 0$ и h имеет степенную главную часть при $y \to 0$. Тогда $h \circ f \sim h \circ g$ при $x \to x_0$.

Задача 12. Пусть $f \in C^n(U_\varepsilon(x_0))$, $f(x_0) = f'(x_0) = \ldots = f^{(n)}(x_0) = 0$. Доказать, что

а) $\forall k < n\ \forall x \in U_\varepsilon(x_0)\ \exists \tilde{x} \in U_\varepsilon(x_0)\ \ f^{(k)}(x) = (x - x_0) f^{(k+1)}(\tilde{x})$;

б) $\forall x \in U_\varepsilon(x_0)\ \exists x_1, x_2, \ldots, x_n \in U_\varepsilon(x_0)\ \ f(x) = (x - x_0)(x_1 - x_0)(x_2 - x_0)\ldots(x_{n-1} - x_0) f^{(n)}(x_n)$;

в) $f(x) = o((x - x_0)^n)$.

Задача 13. а) Пусть $f \in C^n(U_\varepsilon(x_0))$. Тогда многочлен

$$P(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

удовлетворяет следующим условиям:

$$P(x_0) = f(x_0),\quad P'(x_0) = f'(x_0),\quad \ldots,\quad P^{(n)}(x_0) = f^{(n)}(x_0).$$

б) Доказать, что многочлен степени не выше n, удовлетворяющий этим условиям, единствен.

Задача 14. Пусть $f \in C^n(U_\varepsilon(x_0))$. Тогда при $x \to x_0$ справедливо следующее равенство:

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots$$
$$\ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + o((x - x_0)^n).$$

Эта формула называется разложением функции f в *ряд Тейлора* (с центром в точке x_0) с остаточным членом в *форме Пеано*. Если $f \in C^\infty(U_\varepsilon(x_0))$, то выражение

$$f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \ldots$$

называется *рядом Тейлора* функции f.

Задача 15. Выписать ряды Тейлора с центром в нуле для следующих функций:

а) e^x; б) $\sin x$; в) $\cos x$; г) $(1+x)^n$; д) $\sqrt{1+x}$; е) $\frac{1}{1+x}$; ж) $\frac{1}{1-x}$;

з) $\ln(1+x)$; и) $\operatorname{arctg} x$; к)* $(1+x)^a$.

Задача 16. Найти степенные главные части следующих функций при $x \to 0$:

а) $\sin x - \operatorname{tg} x$; б) $\cos x - \cos 2x + \sin x - \arcsin x$;

в) $\cos 2x - e^x + \arcsin x$; г) $\operatorname{tg} x + \operatorname{arctg} x - 2x$;

д)* $\sin\sin x - x$; е)* $\ln\cos 2x + \sin x^2 + \sin^2 x$.

Задача 17. Найти пределы

а) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x\cos x - \sin x}$; б) $\lim\limits_{x\to 0}\left(x \operatorname{ctg}^2 x + \frac{\cos x - e^x}{x^2}\right)$;

в) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{1}{x^4}\left(\ln(1+x)\sin 2x + \cos 2x - \frac{1}{1+x^3}\right)$;

г) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}\sin 9x - \operatorname{tg} 10x + x^3 + x}{x^2\cos 5x + \cos x^2 - 1}$;

д)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$; е)* $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{e^x} - e^{\cos x} - e\sin x}{\sqrt{\cos x} - e^{x^2}}$.

<u>Задача 18*.</u> Пусть $f \in C^{n+1}(U_\varepsilon(x_0))$. Тогда для любого $x \in \dot{U}_\varepsilon(x_0)$ найдется такое $y \in]\min(x, x_0), \max(x, x_0)[$, что

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \ldots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n + \frac{f^{(n+1)}(y)}{n!}(x - x_0)^{n+1}.$$

Эта формула называется разложением функции f в *ряд Тейлора* (с центром в точке x_0) с остаточным членом в *форме Лагранжа*.

Одиннадцатый класс

Интегрирование, ч. 1 Определенный интеграл

Листок 28
сентябрь

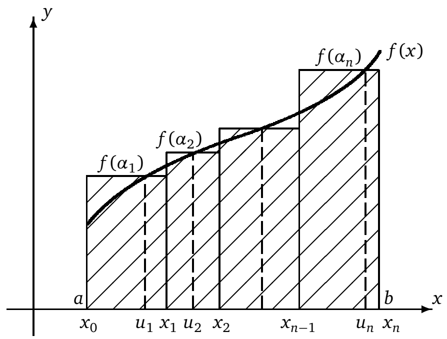
<u>Определение 1.</u> *Разбиением отрезка* $[a, b]$ называется такой набор точек $(x_0, x_1, \ldots, x_m)$, что $a = x_0 < x_1 < \ldots < x_{m-1} < x_m = b$. Разбиение обозначается $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=m}$. *Диаметром* разбиения τ называется число $\lambda(\tau) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant m} \Delta x_i$, где $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$.

<u>Задача 1.</u> Изобразить разбиения $\tau_n = \{x_i\}_{i=0}^{i=n}$ отрезка $[0, 1]$, где а) $x_i = \frac{i}{n}$; б) $x_i = \frac{2i}{n+i}$ для $n = 3, 4, 5$ и вычислить $\lim\limits_{n \to \infty} \lambda(\tau_n)$.

<u>Определение 2.</u> *Разбиением* отрезка с отмеченными точками называется разбиение $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=m}$ вместе с набором точек $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$, где $u_i \in [x_{i-1}, x_i]$. Обозначение: (τ, α).

<u>Определение 3.</u> Пусть $\tau = \{x_i\}_{i=0}^{i=m}$ — разбиение отрезка $[a, b]$ с отмеченными точками $\alpha = (u_1, \ldots, u_m)$. *Интегральной суммой Римана* функции $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ называется число $\sigma_{\tau,\alpha} = \sum\limits_{i=1}^{m} f(u_i)\Delta x_i$.

<u>Замечание.</u> Если функция f положительна на $[a, b]$, то интегральная сумма $\sigma(\tau, \alpha)$ равна площади ступенчатой фигуры, заштрихованной на рисунке.



<u>Задача 2.</u> Пусть $\tau = \left\{x_i = \frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{i=n}$ — разбиение отрезка $[0, 1]$ с отмеченными точками $u_i = \frac{i-1}{n}$. Вычислить интегральную сумму функции f на отрезке $[0, 1]$, где

а) $f(x) = C$; б) $f(x) = x$; в) $f(x) = \sin \pi n x$; г) $f(x) = x^2$.

Задача 3. Пусть $f(x)=e^x$. Может ли интегральная сумма функции f на отрезке [0, 1] быть а) больше 3; б) меньше 1?

Определение 4. *Определенным интегралом Римана* функции f на отрезке $[a,b]$ называется такое число A, что для любой последовательности (τ_n, α_n) разбиений отрезка $[a,b]$ с отмеченными точками, для которой $\lim\limits_{n\to\infty}\lambda(\tau)=0$, последовательность $\sigma_{\tau_n,\alpha_n}(f)$ сходится к A. Если такое A существует, то функция f называется *интегрируемой* (по Риману) на отрезке $[a,b]$. Обозначение: $A=\int\limits_a^b f(x)\,dx$. Отрезок $[a,b]$ называется *отрезком интегрирования функции* f, числа a и b — *нижним* и *верхним пределом интегрирования* соответственно.

Определение 5. Число A называется *определенным интегралом Римана* функции f на отрезке $[a,b]$, если $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для любого разбиения с отмеченными точками (τ,α) отрезка $[a,b]$, удовлетворяющего условию $\lambda(\tau)<\delta$, выполняется $|\sigma_{\tau,\alpha}(f)-A|<\varepsilon$.

Задача 4. Доказать эквивалентность определений 4 и 5.

Задача 5. Доказать, что если определенный интеграл Римана функции f на отрезке $[a,b]$ существует, то он единствен.

Задача 6. Найти пределы интегральных сумм задачи 2 при $n\to\infty$.

Задача 7. Если функция $f\colon[a,b]\to\mathbb{R}$ интегрируема, то она ограничена. Верно ли обратное утверждение?

Определение 6. Пусть f определена на отрезке $[a,b]$, $\tau=\{x_i\}_{i=0}^{i=m}$ — разбиение этого отрезка, $M_i=\sup\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$, $m_i=\inf\{f(x)\mid x\in[x_{i-1},x_i]\}$. Числа $S_\tau(f)=\sum\limits_{i=1}^{m}M_i\Delta x_i$ и $s_\tau(f)=\sum\limits_{i=1}^{m}m_i\Delta x_i$ называются соответственно *верхней* и *нижней интегральными суммами Дарбу* функции f на отрезке $[a,b]$.

Задача 8. Вычислить верхнюю и нижнюю интегральные суммы Дарбу функции f на отрезке [0, 1], если $\tau=\left\{x_i=\frac{i}{n}\right\}_{i=0}^{i=n}$ и

а) $f(x)=c$; б) $f(x)=x$; в) $f(x)=\sin\pi nx$; г) $f(x)=2\{nx\}$;

д) $f(x)=\begin{cases}1 & \text{при } x\in\mathbb{Q},\\ 2 & \text{при } x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}.\end{cases}$

Задача 9. Доказать, что при добавлении к разбиению τ еще одной точки s_τ не уменьшается, а S_τ не увеличивается.

Задача 10. Доказать, что $S_\tau(f)\geqslant s_{\tau'}(f)$ для любых разбиений τ, τ' отрезка $[a,b]$.

Задача 11. Функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, если и только если $\lim\limits_{\lambda(\tau)\to0}(S_\tau(f)-s_\tau(f))=0$ (то есть $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0$ такое, что для любого разбиения τ, удовлетворяющего условию $\lambda(\tau)<\delta$, выполняется неравенство $S_\tau(f)-s_\tau(f)<\varepsilon$).

Задача 12*. Функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, если и только если $\lim\limits_{n\to\infty}(S_{\tau_n}(f)-s_{\tau_n}(f))=0$ для некой последовательности разбиений (τ_n).

Задача 13. Доказать, что функция f, определенная на отрезке $[a,b]$, интегрируема на нем, если

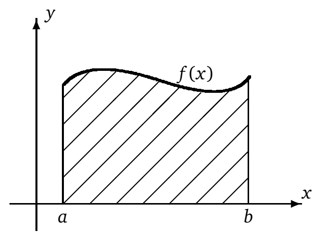
а) f непрерывна;

б) f монотонна;

в) f ограничена и множество точек разрыва конечно;

г)* f ограничена и множество точек разрыва имеет меру нуль.

Замечание. Если функция f положительна и непрерывна на отрезке $[a,b]$, то интеграл Римана $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ имеет геометрический смысл площади фигуры, заштрихованной на рисунке.



Задача 14. Вычислить:

а) $\int\limits_{-1}^{1}x\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^{1}|x|\,dx$; в) $\int\limits_{-1}^{1}[x]\,dx$; г) $\int\limits_{-1}^{1}\{x\}\,dx$; д) $\int\limits_{-1}^{1}x^2\,dx$.

Интегрирование, ч. 2
Свойства определенного интеграла

Листок 29
сентябрь

Определение 1. Если $a \geqslant b$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx = -\int\limits_b^a f(x)\,dx$.

Задача 1. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то она интегрируема и на любом отрезке $[a_1,b_1] \subset [a,b]$.

Задача 2. Если функция f интегрируема на отрезках $[a,b]$ и $[b,c]$, то она интегрируема на $[a,c]$, причем $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

Задача 3. Если функция f интегрируема на отрезке $[\min\{a,b,c\}, \max\{a,b,c\}]$, то $\int\limits_a^c f(x)\,dx = \int\limits_a^b f(x)\,dx + \int\limits_b^c f(x)\,dx$.

Задача 4. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то при любом $c \in \mathbb{R}$ функция cf также интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b cf(x)\,dx = c\int\limits_a^b f(x)\,dx$.

Задача 5. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$, то их сумма также интегрируема на $[a,b]$ и $\int\limits_a^b (f(x)+g(x))\,dx = \int\limits_a^b f(x)dx + \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Задача 6. Если функция f интегрируема и неотрицательна на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$.

Задача 7*. Если функция f интегрируема и положительна на отрезке $[a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx > 0$.

Задача 8. Если функции f и g интегрируемы на отрезке $[a,b]$ и $f(x) \geqslant g(x)$ при всех $x \in [a,b]$, то $\int\limits_a^b f(x)\,dx \geqslant \int\limits_a^b g(x)\,dx$.

Задача 9. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$ и $A \leqslant f(x) \leqslant B$ при всех $x \in [a,b]$, то $A(b-a) \leqslant \int\limits_a^b f(x)\,dx \leqslant B(b-a)$.

Задача 10. Если функция f непрерывна на отрезке $[a,b]$, то существует такое $c \in [a,b]$, что $\int\limits_a^b f(x)\,dx = f(c)(b-a)$.

Задача 11. Если функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $|f|$ также интегрируема на $[a,b]$ и $\left|\int\limits_a^b f(x)\,dx\right| \leqslant \int\limits_a^b |f(x)|\,dx$.

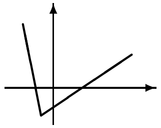
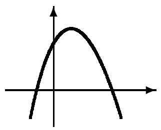
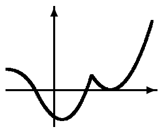
Интегрирование, ч. 3
Неопределенный интеграл

Листок 30
октябрь

Определение 1. *Первообразной* функции $f: M \to \mathbb{R}$, где M — открытое подмножество $\mathbb{R}$, называется такая функция $\Phi: M \to \mathbb{R}$, что $\Phi' = f$.

Задача 1. Если Φ — первообразная функции f, то при любом $c \in \mathbb{R}$ функция $\Phi + c$ также является первообразной для f.

Задача 2. По графику функции f построить примерный график одной из ее первообразных:

а)  б)  в) 

Задача 3. Найти одну из первообразных для каждой из следующих функций:

а) $|x|$; б) $|x^2 - 1|$; в) $x^n, n \in \mathbb{Z}$.

Задача 4. Привести пример функции на $\mathbb{R}$, не имеющей ни одной первообразной.

Задача 5. Может ли первообразная периодической функции на $\mathbb{R}$ быть непериодической?

Задача 6. Что можно сказать о четности первообразных четной (нечетной) функции?

Определение 2. Функция $h: M \to \mathbb{R}$ называется *локально постоянной*, если у всякой точки $x \in M$ найдется такая окрестность $U_\varepsilon(x)$, что функция h постоянна на $M \cap U_\varepsilon(x)$.

Задача 7. Если множество $M \subset \mathbb{R}$ открыто, то функция $h: M \to \mathbb{R}$ локально постоянна тогда и только тогда, когда ее производная равна нулю.

Задача 8. Если множество M связно, то всякая локально постоянная функция $f: M \to \mathbb{R}$ постоянна.

Определение 3. *Неопределенным интегралом* функции f называется множество всех ее первообразных. Обозначение: $\int f(x)\,dx$.

Задача 9. Пусть функция $f: M \to \mathbb{R}$ дифференцируема. Тогда

$$\int f'(x)\,dx = f + C,$$

где C — множество локально постоянных функций на M.

Задача 10. Пусть функции $f, g: M \to \mathbb{R}$ имеют первообразные. Доказать, что

а) $\int (f(x) + g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$;

б) $\int af(x)\,dx = a\int f(x)\,dx$ при $a \neq 0$.

Задача 11. Доказать, что

а) $\int x^a\,dx = \dfrac{x^{a+1}}{a+1} + C$, $x > 0$, $a \neq -1$; б) $\int \dfrac{dx}{x} = \ln|x| + C$;

в) $\int e^x\,dx = e^x + C$; г) $\int a^x\,dx = \dfrac{a^x}{\ln a} + C$;

д) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$; е) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$;

ж) $\int \dfrac{dx}{\sin^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C$; з) $\int \dfrac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$.

Задача 12 (*Замена переменной*). Пусть Φ — первообразная функции $f: M \to \mathbb{R}$, функция $\varphi: W \to \mathbb{R}$ дифференцируема и $\varphi(W) \subset M$. Доказать, что в этом случае $\int f(\varphi(x))\varphi'(x)\,dx = \Phi \circ \varphi + C$, где C — множество локально постоянных функций на W.

Задача 13. Найти следующие интегралы:

а) $\int \sin 3x\,dx$; б) $\int \dfrac{dx}{x+a}$; в) $\int (5x-6)^{100}\,dx$; г) $\int e^{\cos x} \sin x\,dx$;

д) $\int \cos^3 x\,dx$; е) $\int \operatorname{ctg} x\,dx$; ж) $\int \dfrac{dx}{\sin x}$; з) $\int \dfrac{dx}{\cos x}$; и) $\int \dfrac{dx}{x^2 - 6x + 8}$;

к) $\int \cos^2 4x\,dx$.

Задача 14 (*Интегрирование по частям*). Пусть функции $u, v: M \to \mathbb{R}$ дифференцируемы, функция uv' имеет первообразную. Доказать, что функция $u'v$ также имеет первообразную и $\int u(x)v'(x)\,dx = uv - \int u'(x)v(x)\,dx$.

Задача 15. Найти следующие интегралы:

а) $\int x\cos x\,dx$; б) $\int \ln x\,dx$; в) $\int xe^{-x}\,dx$; г)* $\int \arcsin x\,dx$.

Задача 16. Найти следующие интегралы:

а) $\int \sin 5x \cos 2x\,dx$; б) $\int \cos^4 x \sin^2 x\,dx$; в) $\int x^2 \sqrt[3]{1-x}\,dx$;

г) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$; д) $\int \dfrac{x^2}{1+x^2}\,dx$; е) $\int e^{\sqrt{x}}\,dx$; ж) $\int x \operatorname{arctg} x\,dx$.

Задача 17*. Найти следующие интегралы:

а) $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^2}$; б) $\int \dfrac{dx}{(1+x^2)^3}$; в) $\int \dfrac{dx}{1+x^4}$; г) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x+1} - 1}{(x+1)^2 - \sqrt[3]{x+1}}\,dx$;

д) $\int \dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{x\sqrt[3]{x^5 - 1}}\,dx$; е) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{x^2-1}}$; ж) $\int \dfrac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$; з) $\int \dfrac{dx}{(x^2+1)\sqrt{x^2-1}}$.

Интегрирование, ч. 4
Формула Ньютона—Лейбница

Листок 31
декабрь

Определение 1. Пусть функция f интегрируема на отрезке $[a,b]$. Определенная на отрезке $[a,b]$ функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ называется *интегралом с переменным верхним пределом*.

Задача 1. Если f интегрируема на отрезке $[a,b]$, то функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ непрерывна на $[a,b]$.

Задача 2. Если функция f непрерывна в точке $x_0\in[a,b]$ и интегрируема на $[a,b]$, то в точке x_0 функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ имеет производную, равную $f(x_0)$ (одностороннюю при $x_0=a$ или $x_0=b$). Каков геометрический смысл этого утверждения для случая положительной функции f?

Задача 3. Непрерывная функция на отрезке $[a,b]$ имеет на этом отрезке первообразную (при определении первообразной на отрезке в концах рассматривается односторонняя производная).

Задача 4 (*Формула Ньютона—Лейбница*). Пусть Φ — первообразная функции f, функция f а) непрерывна; б)* интегрируема на отрезке $[a,b]$. Тогда $\int\limits_a^b f(t)\,dt=\Phi(x)\big|_a^b=\Phi(b)-\Phi(a)$.

Задача 5. Построить интегрируемую на отрезке $[a,b]$ функцию f, для которой функция $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$

а) в точке $x_0\in\,]a,b[$ имеет несовпадающие односторонние производные;

б) в точке $x_0\in\,]a,b[$ не имеет ни правой, ни левой производной;

в) не имеет производной в точках множества $]a,b[\,\cap\mathbb{Q}$;

г)* не имеет производной в точках несчетного подмножества отрезка.

Задача 6. Построить функцию, интегрируемую на отрезке $[a,b]$, но не имеющую первообразной на этом отрезке.

Задача 7. Построить функцию, не интегрируемую на отрезке $[a,b]$, но имеющую на этом отрезке первообразную.

Задача 8. Построить интегрируемую на отрезке $[a,b]$ функцию f, для которой производная функции $F(x)=\int\limits_a^x f(t)\,dt$ существует во всех точках интервала $]a,b[$, но не совпадает с f на бесконечном подмножестве.

Задача 9. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интегрируема на каждом отрезке и четна (нечетна). Доказать, что функция $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ нечетна (четна).

Задача 10. Пусть функция $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ интегрируема на каждом отрезке и периодична с периодом T. Доказать, что функция $F(x)=\int\limits_0^x f(t)\,dt$ периодична, если и только если $\int\limits_0^T f(t)\,dt=0$.

Задача 11 (*Замена переменной*). Пусть $\varphi\in C^1([\alpha,\beta])$, $\varphi(\alpha)=a$, $\varphi(\beta)=b$, и пусть функция f непрерывна на $\varphi([\alpha,\beta])$. Тогда $\int\limits_a^b f(t)\,dt=\int\limits_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,dt$.

Задача 12. Вычислить а) $\int\limits_{-1}^{1}\frac{dx}{\sqrt{5-4x}}$; б) $\int\limits_0^{\ln 2}\sqrt{e^x-1}\,dx$.

Задача 13 (*Интегрирование по частям*). Если $f,g\in C^1([a,b])$, то

$$\int\limits_a^b f(x)g'(x)\,dx=f(x)g(x)\big|_a^b-\int\limits_a^b f'(x)g(x)\,dx.$$

Задача 14. Вычислить

а) $\int\limits_0^\pi \sin x\,dx$; б) $\int\limits_{-1}^1 x^3\sin x\,dx$; в) $\int\limits_{1/e}^e \ln x\,dx$; г)* $\int\limits_0^\pi \sin^{1000}x\,dx$.

Задача 15. Пусть $f\in C^1(\mathbb{R})$ и $f(0)=0$. Определим функцию $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ формулой $g(x)=\int\limits_0^1 f'(tx)\,dt$. Доказать, что

а) $f(x)=xg(x)$; б)* если $f\in C^\infty(\mathbb{R})$, то $g\in C^\infty(\mathbb{R})$.

Интегрирование, ч. 5
Приложения определенного интеграла

Листок 32
январь

Определение 1. Пусть A — ограниченное подмножество плоскости $\mathbb{R}^2$. Обозначим через $K_m^+(A)$ ($K_m^-(A)$) количество квадратиков вида

$$Q_{k,l} = \left[\frac{k}{m}, \frac{k+1}{m}\right] \times \left[\frac{l}{m}, \frac{l+1}{m}\right],$$

где $m \in \mathbb{N}$, $k, l \in \mathbb{Z}$, удовлетворяющих условию $Q_{k,l} \cap A \neq \varnothing$ ($Q_{k,l} \subset A$). Если

$$\lim_{m\to\infty} \frac{K_m^+(A)}{m^2} = \lim_{m\to\infty} \frac{K_m^-(A)}{m^2} = S(A),$$

то число $S(A)$ называется *площадью* множества A.

Задача 1. Доказать, что если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое m, что

$$\frac{K_m^+(A) - K_m^-(A)}{m^2} < \varepsilon,$$

то множество A имеет площадь.

Задача 2. Доказать, что если множества A, B имеют площадь, то и множества $A \cup B$, $A \cap B$ имеют площадь, причем $S(A\cup B) + S(A\cap B) = S(A) + S(B)$.

Задача 3*. Доказать, что площадь не изменяется при движениях плоскости.

Задача 4. Пусть непрерывная на отрезке $[a, b]$ функция f не принимает значения C на $]a, b[$. Найти площадь криволинейной трапеции, ограниченной кривыми $y = f(x)$, $y = C$, $x = a$, $x = b$.

Задача 5. Найти площадь а) круга радиуса R; б) эллипса с полуосями a и b.

Задача 6. Найти площадь фигур, ограниченных кривыми:
а) $y = 3 - 2x - x^2$, $y = 1 - x$; б) $y = x^3 - x^2 + x$, $y = x^2 + x$;
в) $y = \dfrac{1}{\cos^2 x}$, $y = 0$, $x = 0$, $x = \dfrac{\pi}{4}$; г) $y = x^2$, $y = \sqrt[3]{x}$.

Задача 7. Найти площадь фигуры, ограниченной параболами $y = -x^2 + 4x - 2$, $y = -x^2 - 2x + 5$ и их общей касательной.

Задача 8. Найти максимальное значение площади фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 - x$ и касательными к ней в точках с абсциссами a и $a+1$.

Задача 9. Найти минимальное значение площади фигуры, ограниченной параболой $y = x^2 + x + 1$ и прямой, проходящей через точку $(1, 4)$.

Задача 10. Пусть (r, φ) — полярные координаты на плоскости. Доказать, что площадь фигуры, ограниченной кривыми $r = g(\varphi)$, $\varphi = \alpha$, $\varphi = \beta$, где $g\colon [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ — непрерывная неотрицательная функция, равна $\displaystyle\int_\alpha^\beta \frac{g^2(\varphi)}{2}\,d\varphi$.

Задача 11. Нарисовать фигуры, ограниченные
а) лемнискатой $r = a\sqrt{\cos 2\varphi}$; б) улиткой Паскаля $r = a(1 + \cos\varphi)$ и найти их площадь.

Задача 12*. Пусть $A(\varepsilon)$ — площадь овала, заданного неравенством

$$x^2 + y^2 + \varepsilon(x^4 + y^4) \leqslant 1.$$

Найти производную функции A в нуле.

Задача 13. Дать определение объема, аналогичное определению 1.

Задача 14. Пусть Ψ — тело в $\mathbb{R}^3$, лежащее между плоскостями $\{z = a\}$ и $\{z = b\}$. Обозначим через Φ_c проекцию фигуры $\Psi \cap \{z = c\}$ на плоскость (x, y). Пусть каждая из фигур $\Phi_{p,q}^- = \bigcap\limits_{p\leqslant c\leqslant q} \Phi_c$, $\Phi_{p,q}^+ = \bigcup\limits_{p\leqslant c\leqslant q} \Phi_c$ имеет площадь и для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $t > 0$, что $S(\Phi_{p,p+t}^+) - S(\Phi_{p,p+t}^-) < \varepsilon$ для всякого $p \in [a, b]$. Тогда объем тела Ψ равен $\displaystyle\int_a^b S(\Phi_c)\,dc$.

Задача 15. Пусть F — фигура, лежащая в плоскости $\alpha \subset \mathbb{R}^3$. (*Обобщенным*) *конусом* над F с вершиной $q \in \mathbb{R}^3 \setminus \alpha$ называется объединение отрезков, соединяющих q с точками F (частными случаями обобщенного конуса являются пирамида и обычный конус). Пусть площадь фигуры F равна S. Доказать, что объем конуса над F с вершиной q равен $\frac{1}{3}Sh$, где h — высота конуса (расстояние от q до плоскости α).

Задача 16. Дать определение усеченного конуса и доказать, что его объем вычисляется по формуле $\frac{1}{3}h(S_1 + S_2 + \sqrt{S_1 S_2})$, где S_1 и S_2 — площади оснований, h — высота.

Задача 17. Пусть функция f непрерывна и неотрицательна на отрезке $[a, b]$. Доказать, что объем тела, полученного вращением вокруг оси x криволинейной трапеции $\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b, 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$, равен $\pi\displaystyle\int_a^b f^2(x)\,dx$.

Задача 18. Рассмотрим шар радиуса R. Найти объем
а) шара; б) шарового сегмента высоты h;
в) шарового сектора, угол в осевом сечении которого равен φ.

Задача 19. Пусть производная функции f непрерывна на $[a, b]$. Дать определение длины кривой $\{(x, y) \mid a \leqslant x \leqslant b,\ y = f(x)\}$ и доказать, что она равна $\int\limits_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\,dx$.

Задача 20. Найти длины следующих кривых:
а) $y = \ln x,\ x \in [1, 2]$; б) $y = \sqrt{1 - x^2},\ x \in [-1, 1]$; в) $y = x^2,\ x \in [0, 1]$.

Задача 21. Найти положение центра масс
а) однородного полукруга радиуса R;
б) однородной полуокружности радиуса R.

Задача 22. Найти кинетическую энергию вращения с угловой скоростью ω однородного стержня длины l и массы m вокруг оси z, если ось z перпендикулярна стержню и проходит через его а) конец; б) середину.

Задача 23. Найти работу против архимедовой силы выталкивания при погружении конуса высоты h и объема V в жидкость плотностью ρ, если конус погружается а) вершиной вниз; б) вершиной вверх.

Задача 24. Найти работу, которую совершает идеальный газ массы m с температурой T при изотермическом расширении с изменением давления газа от p_1 до p_2.

Комментарии к обязательным листкам

Листок 1. Теория множеств

Решая задачи первого листка, школьники усваивают правила обращения с множествами. Практика здесь заменяет теорию, поскольку аксиоматический подход к теории множеств был бы совершенно неуместен. Как основу мы держим в уме систему Цермело—Френкеля со счетной аксиомой выбора. Раздача листка сопровождается рассказом о том, что элементы принадлежат множествам, а множества — это наборы элементов. Переносить эти слова на бумагу мы не стали ввиду их неформальности.

Поскольку этот листок первый, то при решении, записи, сдаче задач проблемы возникают практически у всех учеников. Прежде всего проявляются проблемы с логикой, одни более серьезные, другие скорее терминологические. Например, некоторые считают, что «A или B истинно» подразумевает, что истинно ровно одно из этих двух утверждений. Или что утверждение «из A следует B» не может быть истинно, когда A ложно. В таких случаях приходится формулировать определения логических операций (рисуя соответствующие таблицы истинностей) и объяснять, что придется к ним привыкнуть, какими бы странными они ни казались. Кстати, здесь же стоит рассказать и о кванторах $\forall$, $\exists$.

Операции над множествами и логические операции тесно связаны, решение задач листка требует умения по утверждению о множествах строить эквивалентное ему утверждение об элементах множества, и обратно. Например, утверждение «$A \subset (B \cup C)$» равносильно утверждению «всякий элемент множества A принадлежит множеству B или множеству C». Такого рода перевод с одного языка на другой вызывает сложности. Так, большинство школьников легко справляется с задачей о единственности пустого множества, но утверждение, что множество крокодилов, живущих на Северном полюсе, совпадает с множеством бегемотов, живущих на Южном, у многих вызывает протест. То, что всякое утверждение об элементах пустого множества истинно — тоже непростой для понимания факт, здесь скорее даже требуется привыкание, чем понимание. Привыканию помогает обыгрывание на примерах: «Верно ли, что живущие на Северном полюсе крокодилы пьют кофе по утрам?» — «Конечно!» — «Верно ли, что они никогда не пьют кофе?» — «Тоже верно».

Занять тех, кто легко преодолел описанные выше затруднения, призваны дополнительные задачи. Некоторые подпункты задачи 11 не имеют сколько-нибудь изящного решения. Они, в конечном счете, сводятся к перебору, который нужно уметь организовать так, чтобы получилось обозримое решение, поддающееся проверке.

Листок 2. Математическая индукция

Было время, когда с математической индукцией были в той или иной степени степени знакомы практически все поступившие в математический класс. Теперь это не так, и овладение техникой индукции проходит сложнее. Все задачи требуется решать, пользуясь сформулированным в начале листка принципом математической индукции. От учеников требуется каждый раз явно выписывать «утверждение A_n». В таких задачах, как задача 5б), многим хочется начинать индукцию с натурального числа, большего единицы. Казалось бы, несложно перенумеровать утверждения так, чтобы новая нумерация начиналась с единицы, но психологический барьер здесь на удивление серьезен. По мере решения задач умение сформулировать утверждение индукции совершенствуется. Задачи подобраны из разных областей математики, такие, чтобы решать их было интересно. Большинство задач допускают различные модификации, более и менее сложные, решаемые все тем же методом математической индукции.

Листок 3. Отображения множеств

В листке даются необходимые определения, касающиеся отображений множеств. Задачи имеют иллюстративный характер, их решение сводится к несложным манипуляциям со стрелками. В единственной дополнительной задаче главная трудность — это разобраться с условием. Определение отображения как правила совершенно нестрогое, но зато простое. Строгое, но неуклюжее определение можно получить, аксиоматизируя понятие графика отображения; задача 4 как раз об этом. В условии задачи 4 впервые опущены слова «Доказать, что», это тоже приходится объяснять; в дальнейшем такое сокращение становится обычным.

Листок 4. Счетность множеств

В задаче 1 дано определение равномощности. В ней фактически содержится и определение отношения эквивалентности. Отдельно оно нигде не формулируется (не хочется обсуждать понятие отношения), но в дальнейших листках используется. Далее идут определения конечности, счетности, несчетности. Набор задач достаточно стандартен и в некотором смысле исчерпывающ; их решение требует большего труда по сравнению с предыдущим листком. В задаче 12 появляются множества из школьного курса геометрии; тем самым, здесь предполагается знание аксиом геометрии и знакомство с геометрическими конструкциями. Дополнительная задача 16 может оказаться очень сложной (а решить ее стоит!); мягкой подсказкой может послужить подробное разъяснение того, что в этом конкретном случае означает решать задачу «от противного».

Листок 5. Комбинаторика

Этот листок по своему содержанию несколько выпадает из общего курса. Он посвящен основам комбинаторики, причем мы ограничились минимумом вводимых понятий. В силу своей элементарности листок дает школьникам некую передышку между теорией множеств и аксиоматикой полей. Отметим, однако, что не все задачи в нем простые. Во всех задачах, где это возможно, требуется получение ответа в виде числа в десятичной записи. В задаче 2д) места в вагончике «неразличимы». Каждый из подпунктов задачи 12 требуется решать, устанавливая взаимно однозначное соответствие между множествами, которые представляют правую и левую части равенства, согласно определению 1 или задаче 11. Явное выражение для числа сочетаний появляется лишь в задаче 16.

Листок 6. Действительные числа, ч. 1. Аксиомы поля

То, что аксиомы поля рассматриваются как первый шаг к определению поля действительных чисел, характерно для курса математического анализа (заметим при этом, что все приводимые в листке примеры (задача 15) — это конечные поля). Важно добиться понимания того, что поле — это не множество, обладающее какими-то особыми свойствами, а некоторый набор, состоящий из поля как множества и операций сложения и умножения. Еще некоторые школьники считают, что аксиома — это утверждение, не требующее доказательства. Самое время их в этом разубедить. Все обязательные задачи очень простые, на применение аксиом. Сложных тут и не придумаешь. От школьников требуется, чтобы при записи задачи они на каждом шаге указывали, какая именно аксиома применена.

Листок 7. Действительные числа, ч. 2. Упорядоченное поле

Листок состоит из двух частей. Первая — определения и задачи 1—17 — посвящена определению и свойствам упорядоченного поля. Задачи 1—10 — формальные и простые. Затем появляются натуральные числа. При наших определениях натуральные, целые, рациональные числа — подмножества, вообще говоря, совершенно разных упорядоченных полей. Иначе и быть не может при аксиоматическом подходе — объекты определены, в лучшем случае, с точностью до изоморфизма. Но здесь мы не обсуждаем изоморфность и даже не определяем понятия изоморфизма, чтобы не перегружать изложения. (Изоморфизм полей появляется лишь в дополнительном листке «Введение в теорию полей», а если задуматься о натуральных числах, то вообще придем к изоморфизму полугрупп.) Просто утверждения задач справедливы для любого упорядоченного поля. Отметим, что существование упорядоченных полей тоже не обсуждается (строго говоря, доказывать его математика не умеет). Но практических проблем это не вызывает, как, впрочем, и формально-логических.

Определение натуральных чисел оказывается достаточно хитрым и работать с ним не очень просто. Кстати, и пересечение произвольного числа множеств (правильнее — но более неуклюже — сказать, множества множеств) раньше не определялось. Решая задачу 11, стоит задуматься над тем, что получается для нулевого числа множеств. Типичный неправильный подход к решению задач использует утверждение «всякое натуральное число есть сумма некоторого числа единиц». (Какого числа? Натурального? А если два с половиной вдруг натуральное число?) После того как принцип математической индукции доказывается в задаче 13, он оказывается полезным в последующих задачах. В целом задачи 11—17 довольно сложны для школьников.

Вторая часть листка — задачи 18—22 — связана с первой лишь тем, что в ней используются натуральные и рациональные числа (а также пока не определенная десятичная запись, что вызывает протест у наиболее въедливых школьников; впрочем, им несложно разъяснить, что́ именно эта запись обозначает в каждом конкретном случае). Назначение этих задач — дать небольшую передышку от абстракций. Эти задачи можно рассматривать как подготовительные к теме «Предел последовательности».

Листок 8. Действительные числа, ч. 3. Точная верхняя грань

Понятие точной верхней грани — это, пожалуй, первое содержательное понятие, относящееся к собственно анализу. Задача 5 — одно из главных упражнений на его усвоение. Аксиома о точной верхней грани завершает определение поля действительных чисел. Отметим важные задачи о системе вложенных отрезков (систему вложенных (полу-)интервалов тоже стоит здесь обсудить). В определении 4 два

определения впервые для краткости совмещены в одном при помощи скобок, слово «соответственно» при этом опущено.

Листок 9. Десятичная запись действительного числа

С нашей точки зрения, понятие десятичной записи имеет вспомогательный характер: с содержательной точки зрения оно не добавляет ничего нового, просто принято записывать действительные числа именно таким образом. Вследствие этого и задача о несчетности множества действительных чисел отнесена к предыдущему листку — чтобы не привязывать общий факт к конкретному способу записи. Задачи в листке несложные, лишь задача 6 может вызвать затруднения. Она же предоставляет единственную тему для дополнительных обсуждений: как числитель и знаменатель рационального числа связаны с длиной периода задающей его десятичной дроби. Впрочем, это уже теория чисел.

Листок 10. Возведение в степень

Степень определяется при помощи точной верхней/нижней грани. Листок недлинный, но трудоемкий. Формулировка задачи 11 необычна, может потребовать разъяснений. Задача 13 — самая технически сложная — сделана необязательной, но решить ее рано или поздно придется.

Листок 11. Предел последовательности, ч. 1

Основные понятия листка — последовательность, подпоследовательность, предел последовательности, предельная точка. В работе с последовательностями стоит помнить и разъяснять тонкости терминологии. Так, приходится определять последовательность как запись, хотя по сути это отображение. Что такое «почти все члены последовательности» подробно объяснено в определении 4, а аналогичное объяснение выражения «бесконечно много членов последовательности» из задачи 6 в текст не вошло. Возможно, то, что мы пишем «последовательность сходится» вместо «последовательность стремится к чему-то» — отклонение от стандартной терминологии (сходится обычно ряд).

Понятия предела и предельной точки — одни из ключевых в курсе, они требуют усиленного обсуждения с решением дополнительных задач. В листке используются два языка — «ε-n» (определения 3 и 6) и «почти все/бесконечно много» (определение 4 и задача 6). Школьники должны научиться свободно переходить от одного к другому.

Одна из стандартных дополнительных задач к листку такова. В определении 3 можно заменять $\forall\varepsilon>0$ на $\exists\varepsilon>0$, $\exists k\in\mathbb{N}$ на $\forall k\in\mathbb{N}$, $\forall n>k$

на $\exists n > k$, $|x_n - a| < \varepsilon$ на $|x_n - a| \geqslant \varepsilon$, в разных сочетаниях. Так получаются 16 разных утверждений, и для каждого из них требуется выяснить, что́ оно говорит о последовательности.

В листке есть еще определение фундаментальной последовательности; его просто больше некуда было вставить. Это определение впервые пригодится в листке 17 (Равномерная непрерывность и сходимость), а там оно было бы еще менее уместно.

Листок 12. Предел последовательности, ч. 2

Основные темы листка — арифметика пределов, «принцип двух милиционеров», сходимость монотонной последовательности. Задачу 3 предлагается решать при помощи бесконечно малых — так получается проще. Задачу 10 требуется решать по схеме задачи 9: доказывать существование предела и лишь затем его находить. Это не всегда проще, но цель — отработка приема.

Обязательные задачи в листке простые, и может сложиться впечатление, что содержание усваивается легко. Однако, например, следующая задача неожиданно вызвала затруднение у заметного числа школьников, закончивших листок. Пусть последовательность (x_n) сходится, (y_n) расходится. Может ли $(x_n + y_n)$ сходиться? В листке много дополнительных задач, как стандартных, так и оригинальных, некоторые из них весьма сложные.

Листок 13. Открытые и замкнутые множества на прямой

Листок посвящен топологическим свойствам подмножеств прямой, определения из него используются в темах «Предел функции» и «Непрерывность». Листок занимателен для школьников, обязательные задачи в нем несложные. При решении задачи 4 полезно знать определение линейно связного множества. Это определение появится лишь в листке 18, но здесь его можно и самим придумать.

Листок 14. Функции: свойства и графики

Листок по рисованию картинок, весьма трудоемкий. Основные понятия — монотонность, четность/нечетность — входят в стандартную школьную программу. Для задач 6 и 8 каждый преподаватель рисует график функции по своему вкусу. Исследование функций в задаче 7 включает в себя нахождение области определения функции, множества значений, точек пересечения с осями, промежутков монотонности, определение четности/нечетности, периодичности.

Листок 15. Предел функции

После изучения предела последовательности предел функции воспринимается достаточно легко — помогает аналогия. Но, конечно, все равно нужно задавать много дополнительных вопросов. Среди прочего, школьники должны освоить эквивалентность двух языков: языка последовательностей (определение 2: определение предела по Гейне) и языка «ε-δ» (определение 3: определение предела по Коши). Листок несложный. К задаче 16 не стоит относиться серьезно, она про то, что понятие предела функции не так уж хорошо.

Листок 16. Непрерывность функции

По традиции, принятой в математическом анализе, непрерывность изучается после предела функции. Обратный порядок был бы естественнее, так как понятие непрерывности в точке проще понятия предела в точке. Вместо определения 4 (или в дополнение к нему) было бы правильнее сказать, что функция непрерывна, если она непрерывна в каждой точке области определения. Но это определение позволяет сделать формулировки задач чуть короче. В листке собраны важные утверждения о непрерывных функциях. Серьезных затруднений решение задач не вызывает. Необязательные задачи 17, 18а) несложные, задачи 18б), 19 гораздо сложнее.

Листок 17. Равномерная непрерывность и сходимость

Листок представляет собой некоторое отступление от основного русла курса. Две его темы — равномерная непрерывность и равномерная сходимость — в рамках листка никак между собой не связаны. Результат задачи 6 является полезным техническим средством. Например, с его помощью определять степени и доказывать их свойства проще, чем при помощи точных граней, как это делалось в листке 10.

Листок 18. Показательная, логарифмическая и степенная функции

Листок открывается определением обратной функции. Оно совершенно стандартно, но, увы, не согласовано с определением обратного отображения. И получается, что хотя функция — это отображение из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{R}$, но не всякая обратимая функция является обратимым отображением. В листке доказывается непрерывность показательной, логарифмической и степенной функций. Еще в нем определяется число e; задача 20 — самая сложная в листке (для тех, кто не решил необязательную задачу 13 из листка 12).

Листок 19. Тригонометрические функции

Листок открывается определением длины дуги (определение 3, задача 2). Тригонометрические функции вводятся в определении 4 и задачах 5—7. Ученики в принципе уже знакомы с определением длины дуги и тригонометрических функций по курсу школьной алгебры, но для решения задач необходимо переводить геометрические рассуждения на язык координат (и при этом приходится, например, отказаться от использования понятия угла). Утверждение задачи 5 необходимо для определения тригонометрических функций (если только они не определяются при помощи степенных рядов), но в практике преподавания (не только школьного) оно обычно опускается, и этот пробел остается незамеченным.

Задача про синус суммы отнесена здесь к необязательным: она трудна, несмотря на то, что «геометрический» вывод формулы уже известен из курса алгебры. Но со временем эту задачу придется решить, так как без нее потом едва ли можно будет продифференцировать синус. Задача о непрерывности тригонометрических функций, после решения предшествующих, уже очень легкая. Далее следуют задачи о периодах, затем определяются и изучаются обратные тригонометрические функции, все это достаточно несложно. Отметим, что, в сущности, арккосинус изучался еще в задаче 5: там доказывалось, что множество его значений содержит отрезок $[0, \pi]$.

Листок 20. Числовые ряды

Содержание листка вполне стандартно; мы ограничились лишь основными признаками сходимости рядов. Сложность листка средняя. Наибольшие проблемы у школьников вызывают задачи о перестановках членов ряда, проблемы эти связаны скорее со сложностью объяснений.

Листок 21. Дифференцирование, ч. 1

Листок открывается определением производной, далее идут задачи, использующие технику пределов. Затем следует определение касательной (в нем не объясняется, что такое расстояние от точки до прямой, но школьники должны быть в состоянии сформулировать пропущенное определение и доказать его корректность). Задача 8 связывает касательную с производной; здесь также можно обсудить определение касательной как предела секущих. Задачи 10, 11, 12, 14 — классические теоремы анализа.

Листок 22. Касательная

Листок геометрический, от школьников требуется рисовать картинки ко всем задачам. В задаче 3 отсутствует определение перпендикулярности, надо предложить школьникам такое, чтобы утверждение задачи не стало тавтологичным. Например: прямые перпендикулярны, если одна из них переходит в себя при отражении относительно другой. После решения задачи 8 и изучения выпуклости в следующем листке можно разобраться с тем, сколько из какой точки плоскости можно провести касательных к графику данной функции (скажем, с конечным числом перегибов). Задача 10 дает повод к обсуждению эволют, эвольвент, каустик и эквидистант.

Листок 23. Дифференцирование, ч. 2

Первая часть листка — о том, как производная функция связана с монотонностью и экстремумами. Далее открывается способ отыскания асимптот. Затем обсуждается связь выпуклости функции со знаками второй производной. Полное исследование функции в задаче 15 включает в себя, кроме пунктов, указанных в комментариях к листку 14, нахождение асимптот и участков выпуклости графика.

Листок 24. Производная синуса

В листке вычисляются производные тригонометрических функций, затем производная обратной функции и, после этого, производные обратных тригонометрических функций. Далее идет ряд задач-упражнений на дифференцирование. Завершается листок задачами о тригонометрических многочленах, в основном они решаются при помощи дифференцирования.

Листок 25. Производная экспоненты

В листке вычисляются производные показательной, логарифмической, степенной функций. Прочие обязательные задачи — это упражнения на вычисление производных и пределов и исследование функций. Очень много усилий требует решение задачи 10. Из всех пунктов программы исследования не получится точно указать точку, в которой функция из задачи 10д) обращается в нуль и найти точки перегиба для функции в задаче 10з) (но можно выяснить, сколько их). Также выяснение того, выпуклы ли функции из задач 10е), 10и) на всей области определения, скорее всего, потребует применения правила Лопиталя (и здесь можно предложить его в качестве дополнительной задачи, если это не было сделано раньше). Задача 12 аналогична задаче 12 листка 24.

Листок 26. Комплексные числа

Этот листок был в свое время переведен из дополнительных в обязательные в связи с включением комплексных чисел в программу математических классов. Листок носит ознакомительный характер, рисование картинок должно помочь школьникам в создании представления о комплексных числах и голоморфных функциях. Экспоненту комплексного числа мы определяем при помощи формулы Эйлера, хотя в необязательной задаче 20 дано и стандартное определение со степенным рядом. Для работы со степенными рядами еще не хватает технических средств (после изучения формулы Тейлора ситуация улучшится). Отметим, что процедура дифференцирования экспоненты при нашем определении выглядит непривычно.

Самая интересная тема для обсуждения, оставшаяся за пределами листка, — это обращение голоморфных функций: локальное, вблизи регулярного значения произвольной функции, и глобальное (здесь можно ограничиться функциями, определенными в листке). Это ведет к определению, пусть и в нестрогих терминах, римановых поверхностей.

Листок 27. Формула Тейлора

В начале листка определяются классы гладкости функций. Здесь отметим необязательную задачу 3б), она не так уж проста. Далее определяется и исследуется понятие «o-малое». В задаче 8 вводится понятие главной степенной части функции — не вполне каноническое, но удобное. В задаче 11 стоит задуматься над тем, останется ли утверждение верным, если отказаться от условия, что h имеет степенную главную часть. Задачи 12, 13 являются подготовительными к определению ряда Тейлора (задача 14). Задачи 15—17 — упражнения разной сложности на применение изученной техники. В задаче 18 выводится формула Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа. Она очень полезна при изучении сходимости степенных рядов.

Ранние версии листка содержали в качестве необязательной следующую задачу, принадлежащую В. И. Арнольду: найти предел

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin\operatorname{tg}x-\operatorname{tg}\sin x}{\operatorname{arctg}\arcsin x-\arcsin\operatorname{arctg}x}.$$

Она иллюстрирует тот факт, что разложение в ряд Тейлора не всегда является кратчайшим путем к ответу. Однако при более внимательном рассмотрении оказалось, что без разложения в ряд Тейлора трудно доказать, что функция $\operatorname{arctg}\arcsin x-\arcsin\operatorname{arctg}x$ имеет степенную главную часть, а это используется в решении. Так что задача была переведена в разряд устных дополнительных; следует к тому же заметить, что ни один школьник еще не нашел правильного решения без подсказок.

Листок 28. Интегрирование, ч. 1. Определенный интеграл

В листке вводится и обсуждается понятие определенного интеграла Римана. Конструкция интеграла Римана достаточно сложна для усвоения, в ней фактически используется новый для школьников вид предела — предел по фильтру. Эквивалентность определений 4 и 5 (задача 4) — факт, параллельный эквивалентности определений предела функции по Коши и по Гейне. Задачи 11 и 12 связывают между собой подходы с использованием интегральных сумм Римана и Дарбу.

Листок 29. Интегрирование, ч. 2. Свойства определенного интеграла

Все обязательные задачи в этом листке простые.

Листок 30. Интегрирование, ч. 3. Неопределенный интеграл

Листок посвящен основным свойствам неопределенного интеграла. Отметим, что в равенствах типа $\int f'(x)\,dx=f+C$ (как в задаче 9) C обозначает не число, а множество локально постоянных функций; традиционная по виду запись приобретает смысл равенства двух множеств. Задачи на нахождение интегралов несложные, мы не пытаемся учить интегрированию как искусству.

Листок 31. Интегрирование, ч. 4. Формула Ньютона—Лейбница

Формула Ньютона—Лейбница — ключевая теорема анализа, устанавливающая связь между дифференцированием и интегрированием. Обязательные задачи достаточно простые. Отметим, что необязательная задача 15б) по замыслу авторов должна решаться при помощи дифференцирования под знаком интеграла, но, как правило, школьникам не приходит в голову, что интеграл появился в задаче не случайно. Есть, впрочем, и другие способы ее решения.

Листок 32. Интегрирование, ч. 5. Приложения определенного интеграла

Название листка несколько обманчиво — в нем есть задачи и теоретического характера, посвященные определению площади и объема как меры Жордана, их связи с определенным интегралом Римана. Листок открывается определением площади. Придающие ему смысл задачи 1, 2 весьма сложные. То, что листок начинается со сложных задач, само по себе непривычно для школьников. Отметим, что было бы более систематичным начать с определения линейной меры, но для избежания излишнего занудства эта тема была отнесена к области устных обсуждений. Задачи 4, 10 связывают площадь с интегралом в декартовых и полярных координатах. Эта связь используется в задачах 5—9, 11. В задаче 13 школьникам предлагается дать определение объема по аналогии с определением 1. Задача 14 дает выражение объема через интеграл площади сечений; самое сложное в ней — проверить существование объема и интегрируемость. В задачах 15—18 применяется полученная формула. Задачи 19—20 посвящены длине кривой, задачи 21—24 — приложениям интегрирования к задачам из физики.

Дополнительная часть курса

Восьмой класс

Подстановки, ч. 1

Листок 1д
октябрь

Определение 1. *Подстановкой* из n элементов называется взаимно однозначное отображение множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ в себя. Запись вида $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, где $i_1, i_2, \ldots, i_n$ — различные элементы множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ и $j_1, j_2, \ldots, j_n$ — различные элементы множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, обозначает подстановку a, для которой $a(i_k) = j_k$ при всех $k \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Множество всех подстановок из n элементов обозначается S_n.

Задача 1. а) Сколько элементов в множестве S_n?

б) Доказать, что каждую подстановку можно записать как в виде $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, так и в виде $\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$.

в) Сколькими способами можно записать подстановку из n элементов?

Определение 2. *Произведением ab* подстановок $a, b \in S_n$ называется подстановка $a \circ b$.

Задача 2. Если $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \ldots & n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ 1 & 2 & \ldots & n \end{pmatrix}$, то $ab = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \ldots & i_n \\ j_1 & j_2 & \ldots & j_n \end{pmatrix}$.

Задача 3. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&2&1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 2&1&3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 1&3&2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}^2$; г) $\begin{pmatrix} 1&2&3 \\ 3&1&2 \end{pmatrix}^3$;

д) $\begin{pmatrix} 3&5&6&1&2&7&9&4&8 \\ 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5&6&7&8&9 \\ 3&5&6&1&2&7&9&4&8 \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 3&4&5&1&2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1&2&3&4&5 \\ 4&5&1&3&2 \end{pmatrix}$.

Определение 3. Подстановка $e = \begin{pmatrix} 1&2&3&\ldots&n \\ 1&2&3&\ldots&n \end{pmatrix} \in S_n$ называется *тождественной*.

Задача 4. Доказать, что:
а) $\forall a \in S_n$ $ae = ea = a$; б) $\forall a, b, c \in S_n$ $(ab)c = a(bc)$.

Задача 5. Говорят, что $a, b \in S_n$ *коммутируют*, если $ab = ba$. Привести пример некоммутирующих подстановок.

Задача 6. а) Доказать, что для любой подстановки $a \in S_n$ найдется такая подстановка $b \in S_n$, что $ab = ba = e$. Подстановка b называется *обратной к* a. Обозначение: $b = a^{-1}$.

б) Если $ab = e$, то $b = a^{-1}$, $a = b^{-1}$. в) $(a^{-1})^{-1} = a$.

г) Дайте определение *степени подстановки* a^k для целого k. Докажите, что если a и b коммутируют, то $(ab)^k = a^k b^k$.

Задача 7. а) Для любых $a, b \in S_n$ существуют и единственны $x, y \in S_n$ такие, что $ax = b$, $ya = b$.

б) $\forall a, b, c \in S_n$ $(a = b) \Leftrightarrow (ac = bc) \Leftrightarrow (ca = cb)$.

Задача 8. Найти все такие подстановки $b \in S_n$, что b коммутирует с любой подстановкой $a \in S_n$.

Задача 9. Для любой подстановки $a \in S_n$ существует натуральное k, для которого $a^k = e$. Наименьшее такое k называется *порядком* подстановки a.

Задача 10. Вычислить:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}^{100}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}^{1000}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}^{-1000}$;

г) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}^{500}$; д) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 2 & 6 & 3 & 1 \end{pmatrix}^{-127}$; е) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 6 & 5 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}^{1001}$;

ж) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}^{n}$.

Задача 11. Пусть $a, b \in S_n$, $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$. Выразить через подстановки a и b подстановку $a' = \begin{pmatrix} b(1) & b(2) & \dots & b(n) \\ b(i_1) & b(i_2) & \dots & b(i_n) \end{pmatrix}$.

Определение 4. Подстановка $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ i_1 & i_2 & \dots & i_n \end{pmatrix}$ называется *четной*, если число таких пар (k, l), что $k, l \in \{1, 2, \dots, n\}$, $k < l$, $i_k > i_l$, четно, и *нечетной*, если это число нечетно.

Задача 12. Пусть $a = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 4 & 3 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. Какие из следующих подстановок четны, а какие нечетны?

а) e; б) a; в) b; г) b^2; д) b^3; е) ab; ж) ba; з) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$.

Определение 5. Подстановка $a \in S_n$ называется *циклом длины* m, если существуют такие различные $i_1, i_2, \dots, i_m \in \{1, 2, \dots, n\}$, что $a(i_k) = i_{k+1}$ при $k < m$, $a(i_m) = i_1$, $a(j) = j$ при $j \notin \{i_1, i_2, \dots, i_m\}$. Обозначение: $a = (i_1, i_2, \dots, i_m)$. Цикл длины 2 называется *транспозицией*.

Задача 13. Найти порядок цикла длины m.

Задача 14. Каждая подстановка может быть представлена в виде произведения транспозиций.

Задача 15. При умножении на транспозицию (справа или слева) четность подстановки изменяется на противоположную.

Задача 16. Четность произведения k транспозиций равна четности числа k.

Задача 17. а) Как выражается четность ab через четность a и b?

б) Как выражается четность a^n через четность a и n?

Задача 18. Каких элементов в S_n больше — четных или нечетных?

Мощности множеств

Листок 2д
ноябрь

Определение 1. Разобьем совокупность всех множеств на классы так, что два множества попадают в один класс тогда и только тогда, когда они равномощны. Сопоставим такому классу какой-либо символ (*кардинальное число*) и назовем его *мощностью* любого множества из данного класса. Мощность множества A обозначим $|A|$. Для конечных множеств эти символы совпадают с числом элементов множества. Мощность счетного множества обозначается c_0 (или $\aleph_0$ — алеф-нуль). Мощность множества бесконечных последовательностей нулей и единиц называется *мощностью континуума* и обозначается c.

Определение 2. Множество подмножеств множества A обозначим $P(A)$. Символом 2^α будем обозначать мощность множества $P(A)$, где $|A|=\alpha$.

Задача 1. а) Найти $|P(\{1,2,\ldots,n\})|$. б) Найти $|P(\mathbb{N})|$.

Задача 2. Пусть X — множество взаимно однозначных отображений одного счетного множества в другое. Доказать, что X несчетно.

Задача 3*. Доказать, что $2^\alpha \neq \alpha$ для любого кардинального числа α.

Указание. Предположите противное, т. е. что построено взаимно однозначное соответствие между A и $P(A)$.

Определение 3. Будем говорить, что мощность множества A *не меньше* мощности множества B, если B равномощно некоторому подмножеству множества A (обозначение: $|A| \geqslant |B|$). Мощность множества A *больше* мощности множества B, если $|A| \geqslant |B|$ и $|A| \neq |B|$ (обозначение: $|A|>|B|$).

Задача 4. а) $|A| \geqslant |A|$.
б) Если $|A| \geqslant |B|$ и $|B| \geqslant |C|$, то $|A| \geqslant |C|$.

Задача 5. Пусть A — конечное множество, а B — бесконечное. Доказать, что:
а) $|A|<c_0$; б) $c_0 \leqslant |B|$; в) $c_0<c$.

Задача 6. Существует ли такое кардинальное число α, что $2^\alpha = c_0$?

Задача 7*. а) Пусть $A \subset B \subset C$ и $|A|=|C|$. Тогда $|B|=|C|$.
б) Если $|A| \geqslant |B|$ и $|B| \geqslant |A|$, то $|A|=|B|$.
в) Если $|A|>|B|$ и $|B| \geqslant |C|$, то $|A|>|C|$.
г) Если $|A| \geqslant |B|$ и $|B|>|C|$, то $|A|>|C|$.

* Задачи, отмеченные звездочкой, являются более трудными.

Задача 8*. Найти мощность множества X, определенного в задаче 2.

Задача 9*. Доказать, что различных кардинальных чисел, соответствующих бесконечным множествам, бесконечно много.

Задача 10*. Пусть $|A \cup B|=c$. Доказать, что $|A|=c$ или $|B|=c$.

Подстановки, ч. 2

Листок 3д
декабрь

Задача 1. Пусть $a, b \in S_n$, $a=(i_1, i_2, \ldots, i_k)$, $b=(j_1, j_2, \ldots, j_l)$. Доказать, что a и b коммутируют тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих двух условий:

1) циклы a и b — непересекающиеся (то есть $\{i_1, \ldots, i_k\} \cap \{j_1, \ldots, j_l\} = \varnothing$);

2) $k=l$ и $a^m=b$ для некоторого m, взаимно простого с k.

Задача 2. Доказать, что любая подстановка раскладывается в произведение непересекающихся циклов, причем это разложение единственно с точностью до перестановки сомножителей.

Задача 3. Каков максимально возможный порядок подстановки из S_{13}?

Задача 4*. Какое максимальное число попарно коммутирующих подстановок можно построить в S_6?

Задача 5. Какие подстановки могут быть представлены в виде произведения

а) транспозиций $(12), (13), \ldots, (1n)$; б)* циклов (12) и $(12\ldots n)$? (Каждый сомножитель можно использовать несколько раз.)

Задача 6*. Какие подстановки могут быть представлены в виде

а) произведения некоторого числа циклов длины 3;

б) произведения двух циклов?

Задача 7. Пусть $k \in \{2, 3\}$. Найти хотя бы одну подстановку $x \in S_n$, такую что $x^k=a$, или доказать, что это невозможно, если

а) $n=3$, $a=(123)$; б) $n=4$, $a=(1234)$;

в) $n=4$, $a=(12)(34)$; г) $n=6$, $a=(12)(3456)$.

Задача 8. Пусть в разложении $a \in S_n$ на непересекающиеся циклы число циклов длины i равно m_i.

а) Выразить четность a через $m_2, \ldots, m_n$.

б) При каких значениях $m_2, \ldots, m_n$ найдется такая подстановка x, что $x^2=a$?

Задача 9. Если в игре в «пятнадцать» поменять местами фишки с номерами 14 и 15, то, следуя правилам, невозможно получить первоначальное расположение фишек.

Определение 1. Отображение $\varphi\colon S_n \to S_m$ называется *гомоморфизмом*, если $\varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ при любых $a, b \in S_n$.

Задача 10. Композиция гомоморфизмов есть гомоморфизм.

Задача 11. Пусть $\varphi\colon S_n \to S_m$ — гомоморфизм. Тогда $\varphi(e)=e$, $\varphi(a^k)=(\varphi(a))^k$ при всех $a \in S_n$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 12. Найти все гомоморфизмы

а) $S_2 \to S_2$; б) $S_2 \to S_3$; в) $S_2 \to S_4$; г) $S_3 \to S_2$.

Определение 2. Гомоморфизм $\varphi\colon S_n \to S_n$ называется *автоморфизмом* S_n, если он взаимно однозначен.

Задача 13. а) Отображение, обратное к автоморфизму, есть автоморфизм.

б) Композиция автоморфизмов — автоморфизм.

Определение 3. Пусть $a \in S_n$. Отображение $\varphi_a\colon S_n \to S_n$, $b \mapsto aba^{-1}$ называется *сопряжением* (при помощи элемента a). Элементы $b, c \in S_n$ называются *сопряженными*, если найдется такое $a \in S_n$, что $\varphi_a(b)=c$.

Задача 14. Доказать, что сопряжение есть автоморфизм S_n. Верно ли, что сопряжения разными элементами дают разные автоморфизмы?

Задача 15. а) $\varphi_{ab}=\varphi_a \circ \varphi_b$; б) $\varphi_{a^{-1}}=(\varphi_a)^{-1}$.

Задача 16. Сопряженность есть отношение эквивалентности.

Задача 17. Элементы S_n сопряжены тогда и только тогда, когда для любого i число циклов длины i в их разложениях на непересекающиеся циклы совпадает.

Задача 18. Найти все гомоморфизмы

а) $S_n \to S_2$; б) $S_3 \to S_3$; в) $S_3 \to S_4$; г) $S_4 \to S_3$.

Задача 19*. Из скольких элементов может состоять образ гомоморфизма $S_n \to S_m$?

Задача 20*. Сколько существует различных автоморфизмов S_n?

Числа Каталана и числа Фибоначчи

Листок 4д
февраль

Определение 1. На клетчатой бумаге нарисован квадрат $n\times n$ клеток. Рассмотрим $2n$-звенные пути, идущие из вершины A в вершину B по сторонам клеток, не поднимающиеся выше диагонали AB (рис. 1). Число таких путей называется *числом Каталана*. Обозначение: $C(n)$.

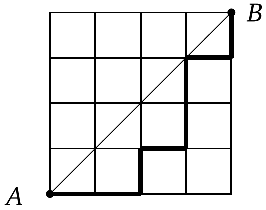


Рис. 1

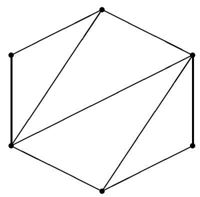


Рис. 2

Определение 2. Рассмотрим выпуклый $(n+2)$-угольник $(n>0)$. Число способов, которыми можно разрезать его на треугольники, проводя непересекающиеся диагонали (рис. 2), называется *числом Каталана*. Обозначение: $C(n)$.

Определение 3. *Числами Каталана* называются такие числа $C(n)$, что

$$C(0)=1,\quad C(n+1)=C(0)C(n)+C(1)C(n-1)+\ldots+C(n)C(0).$$

Определение 4. *Скобочным символом длины* $2n$ назовем последовательность из n открывающих и n закрывающих скобок. Скобочный символ назовем *правильным*, если любой начальный отрезок последовательности содержит открывающих скобок не меньше, чем закрывающих. Число правильных скобочных символов длины $2n$ называется *числом Каталана*. Обозначение: $C(n)$.

Определение 5. Рассмотрим последовательность $a_0, a_1, \ldots, a_n$, состоящую из $n+1$ «числа», которые нужно перемножить, но умножение не ассоциативно (то есть неверно, что $(a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$). Различные способы перемножить эти «числа» можно указывать, расставляя в произведении $a_0\cdot a_1\cdot\ldots\cdot a_{n-1}\cdot a_n$ скобки (не меняя при этом порядка сомножителей), например, $(a_0\cdot a_1)\cdot(a_2\cdot(a_3\cdot a_4))$. Число таких способов называется *числом Каталана*. Обозначение: $C(n)$.

Задача 1(k). Пользуясь определением k $(k=1,\ldots,5)$, вычислить явно (то есть со всеми рисунками и т. п.) числа Каталана $C(n)$ для $n=1, 2, 3, 4$.

Задача 2(k, l). Доказать, что определения k и l эквивалентны.

Задача 3*. Эквивалентность $N+1$ определений можно установить, доказав N утверждений типа «Определения k и l эквивалентны». Сколькими способами можно выбрать эти N утверждений?

Задача 4*. Выразить числа Каталана через числа сочетаний C_m^n.

Определение 6. *Числами Фибоначчи* называются такие числа F_n, что

$$F_0=1,\quad F_1=1,\quad F_{n+2}=F_n+F_{n+1}.$$

Задача 5. При каких n число F_n четно?

Задача 6. Выразить через числа Фибоначчи число таких подмножеств множества $\{1, 2, \ldots, n\}$, которые не содержат одновременно числа i и $i+1$ ни для какого i.

Задача 7 (*Конь в треугольнике Паскаля*). Доказать, что $F_n=\mathrm{C}_n^0+\mathrm{C}_{n-1}^1+\ldots$ (суммируются все такие C_{n-i}^i, что $i\leqslant n-i$).

Задача 8. Доказать, что $F_n^2+F_{n+1}^2=F_{2n+2}$.

Задача 9. Доказать, что F_{2n+1} делится на F_n. Выразить их отношение через числа Фибоначчи.

Задача 10. Доказать, что для любого k найдется бесконечно много таких чисел Фибоначчи, которые делятся на k.

Задача 11*. Доказать, что для любого k найдется бесконечно много таких чисел Фибоначчи, которые оканчиваются на k девяток.

Введение в теорию полей

Листок 5д
март

Задача 1. Доказать, что множество $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ с операциями сложения и умножения по модулю p является полем (здесь и далее p обозначает простое число). Обозначение: $\mathbb{Z}_p$.

Определение 1. Подмножество F_0 поля F называется *подполем* поля F, если F_0 является полем относительно операций сложения и умножения поля F.

Задача 2. а) Обозначим через $\tilde{F}$ множество $\mathbb{Q}\times\mathbb{Q}$, на котором введены операции
1) $(p_1, q_1)+(p_2, q_2)=(p_1+p_2, q_1+q_2)$;
2) $(p_1, q_1)\cdot(p_2, q_2)=(p_1p_2+2q_1q_2, p_1q_2+p_2q_1)$.
Доказать, что $\tilde{F}$ — поле.

б) Доказать, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ — подмножество $\mathbb{R}$, состоящее из элементов вида $q_1+\sqrt{2}q_2$, где $q_1, q_2\in\mathbb{Q}$, — подполе.

в) Является ли подполем подмножество $\mathbb{R}$, состоящее из элементов вида $q_1+\sqrt{2}q_2+\sqrt{3}q_3$, где $q_1, q_2, q_3\in\mathbb{Q}$?

Задача 3. Найти все подполя следующих полей:
а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Z}_p$; в) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; г) $\tilde{F}$ (поле, определенное в задаче 2а).

Определение 2. Поля F и F' называются *изоморфными*, если существует взаимно однозначное отображение $\varphi\colon F\to F'$ такое, что $\forall a, b\in F\ \ \varphi(ab)=\varphi(a)\varphi(b)$ и $\varphi(a+b)=\varphi(a)+\varphi(b)$. Обозначение: $F\simeq F'$. Отображение φ называется *изоморфизмом*.

Задача 4. Изоморфность есть отношение эквивалентности.

Задача 5. Всякое поле содержит в качестве подполя поле, изоморфное $\mathbb{Q}$ или $\mathbb{Z}_p$.

Определение 3. Поле называется полем *характеристики p* (*характеристики* 0), если оно содержит подполе, изоморфное $\mathbb{Z}_p$ ($\mathbb{Q}$). Обозначение: $\operatorname{char} F=p$ ($\operatorname{char} F=0$).

Задача 6. Доказать корректность определения 3.

Задача 7. а) Доказать, что $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ изоморфно полю из задачи 2а).
б) Какие из полей $\mathbb{Z}_p$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$, $\mathbb{R}$ изоморфны?

Задача 8. Найти все *автоморфизмы* (изоморфизмы поля на себя) следующих полей:
а) $\mathbb{Q}$; б) $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$; в) $\mathbb{Z}_p$; г)* $\mathbb{R}$.

Задача 9. а) Для конечного поля характеристики p отображение $x\mapsto x^p$ — автоморфизм.
б) Для поля $\mathbb{Z}_p$ отображение $x\mapsto x^p$ тождественно (малая теорема Ферма).

Задача 10. Доказать, что любые два поля из k элементов изоморфны, где
а) $k=4$; б) k — простое.

Задача 11. Найти все автоморфизмы поля из k элементов, где
а) $k=4$; б) k — простое.

Определение 4. Полем *комплексных чисел* $\mathbb{C}$ называется множество $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ с операциями
1) $(a_1, b_1)+(a_2, b_2)=(a_1+a_2, b_1+b_2)$;
2) $(a_1, b_1)\cdot(a_2, b_2)=(a_1a_2-b_1b_2, a_1b_2+a_2b_1)$.

Задача 12. Проверить корректность определения 4.

Задача 13. Доказать, что элементы вида $(a, 0)$ образуют в $\mathbb{C}$ подполе, изоморфное $\mathbb{R}$.

Определение 5. Элементы $\mathbb{C}$ вида $(a, 0)$ обозначаются через a, элемент $(0, 1)$ через i.

Задача 14. а) $(a, b)=a+bi$; б) $i^2=(-i)^2=-1$.

Определение 6. Отображение $\sigma\colon\mathbb{C}\to\mathbb{C}$, такое что $\sigma(a+bi)=a-bi$ называется *сопряжением*. Обозначение: $\sigma(z)=\overline{z}$.

Задача 15. Сопряжение есть автоморфизм $\mathbb{C}$.

Задача 16. а) Подполе упорядоченного поля можно упорядочить.
б) На $\mathbb{Q}$ отношение порядка единственно.
в) На $\mathbb{Q}[\sqrt{2}]$ отношение порядка вводится ровно двумя способами.
г) Поле $\mathbb{C}$ нельзя упорядочить.
д) Конечное поле нельзя упорядочить.
е)* На $\mathbb{R}$ отношение порядка единственно.

Задача 17*. Поле $\mathbb{R}$ однозначно, с точностью до изоморфизма, определяется своими аксиомами.

Задача 18. Верно ли, что в любом поле F уравнение $x^2=a$ при $a\neq 0$ имеет ровно два решения или ни одного?

Задача 19. Пусть F — поле, $a\in F$. Обозначим через $F[\sqrt{a}]$ множество $F\times F$ с определенными на нем следующими операциями:
1) $(s_1, t_1)+(s_2, t_2)=(s_1+s_2, t_1+t_2)$;
2) $(s_1, t_1)\cdot(s_2, t_2)=(s_1s_2+at_1t_2, s_1t_2+s_2t_1)$.

При каких a множество $F[\sqrt{a}]$ будет полем, если
а) $F=\mathbb{R}$; б) $F=\mathbb{Q}$; в) $F=\mathbb{Z}_p$, $p=2, 3, 5, 7$?

Задача 20*. Какие из полей предыдущей задачи изоморфны между собой?

Задача 21*. При каких p множество $\mathbb{Z}_p[\sqrt{-1}]$ будет полем?

Задача 22*. Для любого нечетного простого p найдется такое a, что $\mathbb{Z}_p[\sqrt{a}]$ будет полем.

Задача 23*. Для любого простого p существует и единственно (с точностью до изоморфизма) поле из p^2 элементов.

Задача 24*. Конечное поле характеристики p имеет p^n элементов.

Задача 25*. В любом конечном поле найдется такой элемент x, что все ненулевые элементы F имеют вид x^n, где $n\in\mathbb{N}$.

Задача 26*. Для любого простого p и любого натурального n существует и единственно (с точностью до изоморфизма) поле из p^n элементов.

Задача 27*. Найти все автоморфизмы поля из p^n элементов.

Задача 28*. Привести пример бесконечного поля характеристики p.

Задача 29*. Привести пример поля, изоморфного своему подполю, отличному от него самого.

Задача 30*. Привести пример упорядоченного поля, в котором не выполняется «аксиома Архимеда».

Задача 31*. Пусть $p_1, p_2, \ldots, p_n$ — различные простые числа, k_1, $k_2, \ldots, k_n$ — ненулевые целые числа. Тогда

$$k_1\sqrt{p_1}+k_2\sqrt{p_2}+\ldots+k_n\sqrt{p_n}\notin\mathbb{Q}.$$

Линейная алгебра I
Линейные пространства

Листок 6д
май

Определение 1. *Линейным пространством* (или *векторным пространством*) над полем F называется множество L с двумя операциями — сложением (паре a, b элементов L ставится в соответствие элемент L, обозначаемый $a+b$) и умножением на число (паре $\lambda\in F$, $a\in L$ ставится в соответствие элемент L, обозначаемый λa), удовлетворяющими следующим условиям (аксиомам):

1) $a+b=b+a$;
2) $(a+b)+c=a+(b+c)$;
3) существует такой элемент $0\in L$, что $a+0=a$ для любого a;
4) $\forall a\ \exists b\ \ a+b=0$;
5) $\lambda(\mu a)=(\lambda\mu)a$;
6) $\lambda(a+b)=\lambda a+\lambda b$;
7) $(\lambda+\mu)a=\lambda a+\mu a$;
8) $1\cdot a=a$.

Элементы линейного пространства называют *векторами*. Линейное пространство, состоящее из одного элемента, обозначается 0.

Задача 1. Являются ли линейными пространствами
а) $\mathbb{Q}$ над $\mathbb{R}$; б) $\mathbb{R}$ над $\mathbb{Q}$; в) $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ над $\mathbb{Q}$;
г) поле над своим подполем;
д) положительные действительные числа $\mathbb{R}_+$ над $\mathbb{Q}$;
е) многочлены с коэффициентами из поля F (обозначение: $F[x]$) над полем F;
ж) многочлены степени не выше n; выше n;
з) многочлены, равные в точке $x=1$ нулю; единице;
и) функции на некотором множестве M со значениями в F и следующими операциями: 1) $(f+g)(x)=f(x)+g(x)$; 2) $(\lambda f)(x)=\lambda(f(x))$;
к) последовательности из n элементов поля F (обозначение: F^n) с операциями: 1) $(x_i)+(y_i)=(x_i+y_i)$; 2) $\lambda(x_i)=(\lambda x_i)$;
л) бесконечные последовательности действительных чисел; ограниченные последовательности; неограниченные последовательности; последовательности, стремящиеся к бесконечности; сходящиеся последовательности;
м) арифметические прогрессии; геометрические прогрессии;
н) последовательности Фибоначчи (последовательности, удовлетворяющие условию $x_{n+1}=x_{n-1}+x_n$);
о)* функции вида $a\sin(x+c)$?

Задача 2. Введите структуру линейного пространства на произведении двух линейных пространств над F.

Определение 2. *Линейным подпространством* линейного пространства L называется непустое подмножество $L_1 \subset L$, удовлетворяющее условиям:
1) $\forall x, y \in L_1 \ \ x+y \in L_1$; 2) $\forall \lambda \in F \ \forall x \in L_1 \ \ \lambda x \in L_1$.

Задача 3. Доказать, что линейное подпространство является линейным пространством (относительно тех же операций сложения и умножения на число).

Определение 3. *Суммой* линейных подпространств L_1 и L_2 линейного пространства L называется множество, обозначаемое $L_1 + L_2$ и состоящее из всех $x \in L$, представимых в виде $y+z$, где $y \in L_1$, $z \in L_2$.

Задача 4. Пусть L_1, L_2 — линейные подпространства. Являются ли линейными подпространствами следующие множества:
а) $L_1 + L_2$; б) $L_1 \cup L_2$; в) $L_1 \cap L_2$?

Задача 5. Пусть L_1, L_2, L_3 — линейные подпространства. Доказать, что
а) $L_1 + 0 = L_1 = L_1 + L_1$; б) $L_1 + L_2 = L_2 + L_1$;
в) $(L_1 \cap L_3) + (L_2 \cap L_3) \subset (L_1 + L_2) \cap L_3$.

Задача 6. Дайте определение суммы произвольного числа подпространств (обозначение для суммы конечного числа подпространств: $L_1 + \ldots + L_k$) и докажите, что $L_1 + L_2 + L_3 = L_1 + (L_2 + L_3) = (L_1 + L_2) + L_3$.

Задача 7. Найти суммы и пересечения:
а) пространства четных и пространства нечетных функций на $\mathbb{R}$;
б) пространства функций на $\mathbb{R}$, равных нулю на множествах M_1, M_2;
в)* пространства многочленов, делящихся на фиксированные многочлены $p_1, p_2 \in \mathbb{R}[x]$.

Линейная алгебра II
Линейные отображения

Листок 7д
май

Определение 1. Пусть L_1, L_2 — линейные пространства над полем F. Отображение линейных пространств $A\colon L_1 \to L_2$ называется *линейным отображением* (*гомоморфизмом*), если выполняются следующие условия: $A(x+y) = A(x) + A(y)$, $A(\lambda x) = \lambda A(x)$. Множество линейных отображений из L_1 в L_2 обозначается $\mathrm{Hom}(L_1, L_2)$. Если $L_1 = L_2$, то такое отображение называется *линейным оператором* на L_1 (*эндоморфизмом* пространства L_1). Множество эндоморфизмов L_1 обозначается $\mathrm{End}(L_1)$.

Задача 1. Являются ли линейными следующие отображения $A\colon L_1 \to L_2$:
а) $Ax = 0$;
б) $L_1 = L_2$, $Ax = x$ (такое отображение называется *тождественным*; обозначение: id или E);
в) $L_1 = \mathbb{R}^4$, $L_2 = \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z, t) = (x+y, y+z, z+t)$;
г) $L_1 = L_2 = \mathbb{R}^3$, $A(x, y, z) = (x+1, y+1, z+1)$;
д) $L_1 = L_2 = F[x]$, $(Ap)(x) = p(\lambda x^2 + \nu)$, λ, ν — фиксированные элементы F;
е) $L_1 = L_2 = F[x]$, $(Ap)(x) = q(x) \cdot p(x)$, $q(x)$ — фиксированный элемент $F[x]$;
ж) L_1 — пространство сходящихся последовательностей действительных чисел, $L_2 = \mathbb{R}$, $A(x_i) = \lim\limits_{i\to\infty} x_i$.

Задача 2. Доказать, что $\mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ — линейное пространство относительно следующих операций: $(A+B)x = Ax + Bx$, $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$.

Задача 3. Доказать, что произведение (композиция) линейных отображений есть линейное отображение. Проверить свойства ассоциативности и дистрибутивности.

Определение 2. *Ядром* линейного отображения A называется множество, состоящее из всех таких x, что $Ax = 0$. Обозначение: $\ker A$. Образ линейного отображения A обозначается $\mathrm{im}\, A$.

Задача 4. Доказать, что ядро и образ линейного отображения являются линейными пространствами.

Задача 5. Найти ядра и образы линейных отображений задачи 1.

Задача 6. Пусть A — отображение пространства многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами в пространство функций на $M \subset \mathbb{R}$, которое переводит многочлен в его ограничение на M. а) Доказать, что A линейно. б) При каких M $\ker A = 0$?

Определение 3. Отображение $A \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ называется *изоморфизмом*, если $\ker A = 0$ и $\mathrm{im}\, A = L_2$. Множество изоморфизмов обозначается $\mathrm{Iso}(L_1, L_2)$. В случае $L_1 = L_2$ изоморфизмы называются *автоморфизмами*. Обозначение: $\mathrm{Aut}(L_1)$.

Задача 7. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$. Доказать, что следующие утверждения эквивалентны:
1) A — изоморфизм;
2) A взаимно однозначно;
3) A обратимо, т. е. существует такое отображение $A^{-1} \in \mathrm{Hom}(L_2, L_1)$, что $AA^{-1} = \mathrm{id}$ и $A^{-1}A = \mathrm{id}$.

Задача 8. Пусть $A \in \mathrm{Iso}(L_2, L_3)$, $B \in \mathrm{Iso}(L_1, L_2)$, λ — число, не равное нулю. Доказать, что $\lambda A \in \mathrm{Iso}(L_2, L_3)$, $AB \in \mathrm{Iso}(L_1, L_3)$, и выразить обратные к λA и AB отображения через A^{-1} и B^{-1}.

Определение 4. Линейные пространства L_1, L_2 называются *изоморфными*, если $\mathrm{Iso}(L_1, L_2)$ непусто.

Задача 9. Доказать, что изоморфность есть отношение эквивалентности.

Задача 10*. Пусть $(\mathrm{id} + AB) \in \mathrm{Aut}(L)$. Доказать, что $(\mathrm{id} + BA) \in \mathrm{Aut}(L)$.

Определение 5. Пусть L_0 — линейное подпространство пространства L. Введем на L отношение эквивалентности: $(x \sim y)$, если $(x - y) \in L_0$. Множество классов эквивалентности называется *факторпространством* L по L_0. Обозначение: L/L_0.

Задача 11. Доказать, что факторпространство L/L_0 есть линейное пространство относительно следующих операций:
1) сложение: $\forall x, y \in L/L_0$ сумма $x + y$ есть класс эквивалентности элемента $a + b$, где $a \in x$, $b \in y$;
2) умножение на число: $\forall x \in L/L_0$, $\lambda \in F$ произведение λx есть класс эквивалентности элемента λa, где $a \in x$.

Задача 12. а) $L/0 \cong L$ (знак $\cong$ обозначает изоморфность). б) $L/L \cong 0$.
в) Пусть $L \subset \mathbb{R}[x]$ — пространство многочленов, равных нулю в точке 1. Доказать, что $\mathbb{R}[x]/L \cong \mathbb{R}$.
г) Факторпространство всех сходящихся последовательностей по бесконечно малым изоморфно $\mathbb{R}$.

Задача 13. Доказать, что для всякого $A \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$ корректно определено и является изоморфизмом отображение $L_1/\ker A \to \mathrm{im}\, A$, переводящее класс эквивалентности вектора $x \in L_1$ в Ax.

Девятый класс

Линейная алгебра III
Базис, размерность

Листок 8д
сентябрь

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над полем F. Вектор вида $x = \alpha_1 u_1 + \alpha_2 u_2 + \ldots + \alpha_n u_n$, где $\alpha_i \in F$, $u_i \in L$, называется *линейной комбинацией* векторов $u_1, \ldots, u_n$ (если $n = 0$, то полагаем $x = 0$). Если все векторы u_i различны и коэффициенты α_i ненулевые, то линейная комбинация называется *неприводимой*.

Задача 1. Доказать, что множество линейных комбинаций векторов из множества $U \subset L$ является линейным подпространством пространства L. Это подпространство называется *линейной оболочкой* U и обозначается $\langle U \rangle$.

Определение 2. Векторы множества U называются *линейно независимыми*, если никакая неприводимая линейная комбинация ненулевого числа элементов U не равна нулю.

Задача 2. Являются ли линейно независимыми векторы следующих множеств:
а) $\{(1, -1, 0), (-1, 0, 1), (0, 1, -1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
б) $\{(1, 1, 0), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\} \subset \mathbb{R}^3$;
в)* множество всех геометрических прогрессий с первым членом, равным 1?

Задача 3. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$ — изоморфизм. Доказать, что векторы множества $U \subset L_1$ линейно независимы тогда и только тогда, когда векторы множества $A(U)$ линейно независимы.

Задача 4. Векторы множества U являются линейно зависимыми, если и только если один из них есть линейная комбинация других.

Задача 5. Пусть из трех векторов e_1, e_2, e_3 любые два линейно независимы. Могут ли все три вектора быть линейно зависимыми?

Определение 3. *Базисом* линейного пространства L называется множество линейно независимых векторов из L, линейная оболочка которого совпадает с L.

Задача 6. Множество векторов является базисом L, если и только если любой вектор из L выражается в виде неприводимой линейной комбинации векторов этого множества единственным (с точностью до перестановки слагаемых) образом.

Задача 7. Если один из двух базисов есть подмножество другого, то эти два базиса совпадают.

Задача 8. Пусть X — базис пространства L. Доказать, что всякое отображение из X в линейное пространство L' ровно одним способом продолжается до линейного отображения из L в L'.

Задача 9. Пусть X — базис пространства L, $X_0 \subset X$, $L_0 = \langle X_0 \rangle$. Доказать, что классы эквивалентности элементов множества $X \setminus X_0$ образуют базис пространства L/L_0.

Задача 10. а) Пусть некоторое множество линейно независимых векторов не есть базис. Тогда к нему можно добавить еще один вектор так, что векторы нового множества останутся линейно независимыми.

б) Пусть некоторое множество векторов не есть базис, но его линейная оболочка совпадает со всем пространством. Тогда из него можно убрать один вектор так, что линейная оболочка при этом не изменится.

Задача 11. Пусть X, X' — базисы пространства L. Доказать, что для любого вектора $x \in X \setminus X'$ найдется такой вектор $y \in X' \setminus X$, что $X \cup \{y\} \setminus \{x\}$ есть базис L.

Определение 4. Линейное пространство L называется *конечномерным*, если у него есть конечный базис. Число элементов этого базиса называется *размерностью* пространства L и обозначается $\dim L$.

Задача 12. Доказать, что в конечномерном пространстве

а) любое линейно независимое множество векторов можно дополнить до базиса;

б) из всякого множества векторов, линейная оболочка которого совпадает со всем пространством, можно выделить базис.

Задача 13. Пусть L_0 — подпространство пространства L. Доказать, что L конечномерно тогда и только тогда, когда L_0 и L/L_0 конечномерны.

Задача 14. Доказать, что определение размерности пространства L корректно, то есть если пространство конечномерно, то все его базисы равномощны.

Задача 15. Какие из пространств задачи 1 листка 6д (Линейная алгебра I) являются конечномерными? Укажите для них размерности и базисы.

Задача 16. Доказать, что два конечномерных пространства изоморфны тогда и только тогда, когда их размерности равны.

Задача 17. Существует ли линейное пространство, содержащее ровно 20 векторов?

Задача 18. Сколько различных базисов существует в $(\mathbb{Z}_p)^n$?

Задача 19. Пусть L_1 — подпространство размерности k конечномерного пространства L. Тогда в L можно выбрать такой базис, что k его векторов будут лежать в L_1.

Задача 20. Пусть L_1, L_2 — подпространства конечномерного пространства L.

а) Выразить $\dim(L/L_1)$ через $\dim L$ и $\dim L_1$.

б) Доказать, что $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 + L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$.

Задача 21. Пусть L_1, L_2 — подпространства пространства L. Какие значения могут принимать $\dim(L_1 + L_2)$ и $\dim(L_1 \cap L_2)$, если

а) $\dim L = 3$, $\dim L_1 = \dim L_2 = 2$;

б) $\dim L = m$, $\dim L_1 = m_1$, $\dim L_2 = m_2$?

Задача 22. Пусть L — конечномерное пространство, $A \in \mathrm{End}(L)$. Доказать, что следующие условия эквивалентны:

1) $A \in \mathrm{Aut}(L)$;
2) $\ker A = 0$;
3) $\mathrm{im}\, A = L$;
4) $\exists B \in \mathrm{End}(L) \ \ AB = \mathrm{id}$;
5) $\exists B \in \mathrm{End}(L) \ \ BA = \mathrm{id}$;
6) $\forall C \in \mathrm{End}(L) \setminus \{0\} \ \ AC \neq 0$;
7) $\forall C \in \mathrm{End}(L) \setminus \{0\} \ \ CA \neq 0$.

Определение 5. *Рангом* линейного отображения A называется число $\dim(\mathrm{im}\, A)$. Обозначение: $\mathrm{rk}(A)$.

Задача 23. Доказать, что:

а) если C и D — автоморфизмы, то $\mathrm{rk}(CAD) = \mathrm{rk}(A)$;

б) $\mathrm{rk}(AB) \leqslant \min(\mathrm{rk}(A), \mathrm{rk}(B))$;

в) $\mathrm{rk}(A) - \mathrm{rk}(B) \leqslant \mathrm{rk}(A+B) \leqslant \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(B)$;

г)* $\mathrm{rk}(BA) + \mathrm{rk}(AC) \leqslant \mathrm{rk}(A) + \mathrm{rk}(BAC)$.

Задача 24. Пусть L_1, L_2 — конечномерные пространства, $A\colon L_1 \to L_2$ — линейное отображение ранга k. Доказать, что в L_1 и L_2 можно выбрать такие базисы $\{e_i\}$ и $\{g_j\}$, что $Ae_i = g_i$ при $i \leqslant k$, $Ae_i = 0$ при $i > k$.

Задача 25. Пусть $A\colon L_1 \to L_2$ — линейное отображение из задачи 6 листка 7д (Линейная алгебра II), где $M = \{x_1, \ldots, x_k\}$.

а) Когда A является изоморфизмом? Найти $\mathrm{rk}(A)$.

б) Пусть $f_j: M \to \mathbb{R}$,

$$f_j(x_i) = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Построить такой многочлен p_j степени $k-1$, что $Ap_j = f_j$.

в) Для произвольного набора чисел c_i, $1 \leqslant i \leqslant k$, построить многочлен степени не выше $k-1$, значение которого в точке x_i равно c_i.

Задача 26. Пусть L_1 и L_2 — конечномерные пространства, $A: L_1 \to L_2$ — произвольное линейное отображение. Доказать, что число $\dim(\ker A) - \dim(L_2/\operatorname{im} A)$ не зависит от выбора A. Выразить это число через $\dim L_1$ и $\dim L_2$.

Канторово множество и некоторые его свойства

Листок 9д
октябрь

Задача 1. Рассмотрим последовательность множеств

$$I_1 = [0, 1], \quad I_{n+1} = \{x \in \mathbb{R} \mid 3x \in I_n \text{ или } 3x - 2 \in I_n\}, \quad n \geqslant 1.$$

а) Нарисовать множества I_n для $n \leqslant 4$.

б) Доказать, что $I_{n+1} \subset I_n$ при любом n.

Определение 1. Множество $K = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} I_n$ называется *канторовым множеством*.

Задача 2. Дать определение троичной записи действительного числа. Описать канторово множество, используя троичную запись действительных чисел.

Задача 3. Какие из чисел $0, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{3}{4}$ принадлежат канторову множеству?

Задача 4. Доказать, что канторово множество несчетно.

Задача 5. Является ли канторово множество открытым, замкнутым, плотным в себе, совершенным?

Определение 2. Множество называется *нигде не плотным*, если его замыкание не имеет внутренних точек.

Задача 6. Подмножество нигде не плотного множества нигде не плотно.

Задача 7. Объединение конечного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно.

Задача 8. Какие из следующих множеств нигде не плотны?

а) $\varnothing$; б) конечное множество; в) $\mathbb{Z}$; г) $]a, b[$; д) $[a, b]$;

е) $\mathbb{R}$; ж) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\}$; з) $\left\{\frac{1}{n} \,\middle|\, n \in \mathbb{N}\right\} \cup \{0\}$; и) $\mathbb{Q}$.

Задача 9. Верно ли, что канторово множество нигде не плотно?

Задача 10. Верно ли, что множество нигде не плотно тогда и только тогда, когда множество его предельных точек нигде не плотно?

Задача 11. Верно ли, что

а) дополнение к всюду плотному множеству нигде не плотно;

б) дополнение к нигде не плотному множеству всюду плотно;

в) дополнение к открытому всюду плотному множеству нигде не плотно?

Задача 12. Всегда ли объединение счетного числа нигде не плотных множеств нигде не плотно?

Задача 13. Можно ли представить отрезок в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств?

Определение 3. Множество M называется *множеством меры нуль*, если для любого положительного ε найдется такое множество X_ε интервалов, что

(1) M есть подмножество объединения интервалов множества X_ε;

(2) сумма длин интервалов любого конечного подмножества множества X_ε не превосходит ε.

Задача 14. Подмножество множества меры нуль имеет меру нуль.

Задача 15. Объединение не более чем счетного числа множеств меры нуль имеет меру нуль.

Задача 16. Какие из множеств задачи 8 имеют меру нуль?

Задача 17. Верно ли, что канторово множество имеет меру нуль?

Задача 18. Всякое ли нигде не плотное множество имеет меру нуль?

Линейная алгебра IV
Двойственное пространство

Листок 10д
ноябрь

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над полем F. Пространство $\mathrm{Hom}(L, F)$ называется *двойственным* (или *сопряженным*) к L и обозначается L^t. Его элементы называются также *ковекторами*, *линейными функциями* или *линейными функционалами* (на L).

Задача 1. Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис пространства L. (Под базисом мы будем теперь понимать последовательность неповторяющихся векторов, множество которых есть базис в смысле определения 3 листка 8д (Линейная алгебра III).)

а) Доказать, что $\dim L^t = n$ и что в L^t можно выбрать такой базис $(f^1, \ldots, f^n)$, что $f^i(e_i) = 1$ и $f^i(e_j) = 0$ при $i \neq j$. Базис (f^i) называется *двойственным* к базису (e_i).

б) Пусть $A \in \mathrm{Hom}(L, L^t)$ — такое отображение, что $A(e_i) = f^i$. Зависит ли A от выбора базиса (e_i)?

Задача 2. а) Доказать, что для всякого линейного пространства L существует и единственно отображение $D_L : L \to L^{tt}$, удовлетворяющее условию

$$\forall x \in L \ \forall y \in L^t \ \ (D_L(x))(y) = y(x).$$

б) Доказать, что $D_L \in \mathrm{Hom}(L, L^{tt})$.

в) Пусть $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис L, $(g_1, \ldots, g_n)$ — дважды двойственный ему базис L^{tt}, $A \in \mathrm{Hom}(L, L^{tt})$ — такое отображение, что $A(e_i) = g_i$. Зависит ли A от выбора базиса (e_i)?

г) Доказать, что если L конечномерно, то D_L — изоморфизм.

Определение 2. *Аннулятором* подпространства L_0 линейного пространства L называется множество $\{f \in L^t \mid L_0 \subset \ker f\}$ (обозначение: $\mathrm{ann}\, L_0$).

Задача 3. Доказать, что аннулятор — линейное подпространство.

Задача 4. Пусть L_1, L_2 — линейные подпространства конечномерного пространства L.

а) Найти $\mathrm{ann}\, 0$ и $\mathrm{ann}\, L$.

б) Выразить $\mathrm{ann}(L_1 + L_2)$ и $\mathrm{ann}(L_1 \cap L_2)$ через $\mathrm{ann}\, L_1$ и $\mathrm{ann}\, L_2$.

в) Выразить $\dim(\mathrm{ann}\, L_1)$ через $\dim L$ и $\dim L_1$.

г) Верно ли, что $\mathrm{ann}(\mathrm{ann}\, L_1) = D_L(L_1)$?

Определение 3. Линейное пространство L называется *прямой суммой* своих подпространств $L_1, L_2, \ldots, L_n$, если всякий вектор $x \in L$ ровно одним способом представим в виде $x_1 + x_2 + \ldots + x_n$, где $x_1 \in L_1$, $x_2 \in L_2$, …, $x_n \in L_n$. Обозначение: $L = L_1 \oplus L_2 \oplus \ldots \oplus L_n$.

Задача 5. Доказать, что $L = L_1 \oplus L_2$ тогда и только тогда, когда $L = L_1 + L_2$ и $L_1 \cap L_2 = 0$.

Задача 6. Пусть $L_1, L_2, L_3 \subset L$. Верно ли, что утверждения $L = L_1 \oplus \oplus L_2 \oplus L_3$, $L = (L_1 \oplus L_2) \oplus L_3$, $L = L_1 \oplus (L_2 \oplus L_3)$ эквивалентны?

Задача 7. Доказать, что если $L = L_1 \oplus L_2$, то $L^t = \operatorname{ann} L_1 \oplus \operatorname{ann} L_2$.

Определение 4. Пусть $A \in \operatorname{Hom}(L, M)$. Линейное отображение $A^t \in \operatorname{Hom}(M^t, L^t)$, удовлетворяющее условию $\forall f \in M^t\ \forall x \in L\ \ (A^t f)(x) = f(Ax)$, называется *сопряженным* (или *двойственным*) к отображению A.

Задача 8. а) Определение 4 корректно.

б) Отображение $(A \mapsto A^t)$ принадлежит пространству

$$\operatorname{Hom}(\operatorname{Hom}(L, M), \operatorname{Hom}(M^t, L^t)).$$

в) Выразить $(\lambda A)^t$, $(A+B)^t$, $(AB)^t$ через λ, A^t, B^t.

Задача 9. а) Доказать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} L \arrow[r, "A"] \arrow[d, "D_L"'] & M \arrow[d, "D_M"] \\ L^{tt} \arrow[r, "A^{tt}"] & M^{tt} \end{tikzcd}$$

коммутативна, то есть $A^{tt} D_L = D_M A$.

б) Доказать, что в случае конечномерных L и M отображение A^{tt} совпадает с A при отождествлении L с L^{tt} (при помощи D_L), M с M^{tt} (при помощи D_M).

Задача 10. Пусть $A \in \operatorname{Hom}(L, M)$, пространства L и M конечномерны. Верно ли, что

а) $\operatorname{ann}(\operatorname{im} A) = \ker A^t$; б) $\operatorname{ann}(\operatorname{im} A^t) = D_L(\ker A)$; в) $\operatorname{rk}(A) = \operatorname{rk}(A^t)$?

Метрические пространства

Листок 11д
декабрь

Определение 1. *Метрическим пространством* называется множество X с отображением $\rho\colon X \times X \to \mathbb{R}$ (называемым *метрикой*), которое удовлетворяет следующим условиям (аксиомам):

1) $\rho(x, y) \geqslant 0$ для любых $x, y \in X$;

2) $\rho(x, y) = 0$ тогда и только тогда, когда $x = y$;

3) $\rho(x, y) = \rho(y, x)$ для любых $x, y \in X$;

4) $\rho(x, y) + \rho(y, z) \geqslant \rho(x, z)$ для любых $x, y, z \in X$ (аксиома треугольника).

Задача 1. Доказать, что на каждом множестве существует ровно одна метрика, принимающая только значения 0 и 1.

Задача 2. Какая из аксиом 1—4 определения 1 следует из остальных?

Задача 3. Описать все метрики ρ на множестве $\{a, b, c, d\}$, удовлетворяющие условиям $\rho(a, b) = 1$, $\rho(b, c) = 2$, $\rho(a, c) = 3$, $\rho(c, d) = 4$.

Задача 4. Является ли $(\mathbb{R}, \rho)$ метрическим пространством, если

а) $\rho(x, y) = |x - y|$;

б) $\rho(x, y) = \sqrt{|x - y|}$;

в) $\rho(x, y) = (x - y)^2$;

г) $\rho(x, y) = \sin^2(x - y)$;

д) $\rho(x, y) = \left| \dfrac{x}{\sqrt{1+x^2}} - \dfrac{y}{\sqrt{1+y^2}} \right|$?

Задача 5. Является ли отображение $\tau\colon (X \times Y) \times (X \times Y) \to \mathbb{R}$ метрикой на $X \times Y$ для любых метрических пространств (X, ρ), (Y, σ), если

а) $\tau((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho(x_1, x_2) + \sigma(y_1, y_2)$;

б) $\tau((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \min(\rho(x_1, x_2), \sigma(y_1, y_2))$;

в) $\tau((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \max(\rho(x_1, x_2), \sigma(y_1, y_2))$;

г) $\tau((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \rho^2(x_1, x_2) + \sigma^2(y_1, y_2)$;

д) $\tau((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{\rho^2(x_1, x_2) + \sigma^2(y_1, y_2)}$?

Задача 6. Является ли $(\mathbb{R}^n, \rho)$ метрическим пространством, если

а) $\rho(x, y) = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(|x_i - y_i|)$; б) $\rho(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|$;

в) $\rho(x, y) = \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n} (x_i - y_i)^2}$ (евклидова метрика);

г)* $\rho(x, y) = \left(\sum\limits_{i=1}^{n} |x_i - y_i|^p \right)^{1/p}$?

Задача 7. Задает ли отображение $\rho(f,g)=\sup\limits_{a\in A}|f(a)-g(a)|$ метрику на пространстве ограниченных функций на A?

Задача 8. *Подпространством* метрического пространства (X,ρ) называется подмножество $Y\subset X$ с метрикой, полученной ограничением ρ на $Y\times Y$. Доказать, что всякое подпространство метрического пространства есть метрическое пространство.

Определение 2. Метрические пространства $(X,\rho),(Y,\sigma)$ называются *изометричными*, если существует такое взаимно однозначное отображение $f\colon X\to Y$ (называемое *изометрией*), что $\rho(x_1,x_2)=$ $=\sigma(f(x_1),f(x_2))$ для любых $x_1,x_2\in X$.

Задача 9. Доказать, что изометричность есть отношение эквивалентности.

Задача 10. а) Какие из пространств задачи 4 изометричны?
б) Найти все внутренние изометрии (отображения в себя) пространств задачи 4.

Задача 11. При каких k,n любое метрическое пространство из k элементов изометрично подпространству евклидова метрического пространства $\mathbb{R}^n$?

Задача 12*. а) Доказать, что все изометрии евклидова метрического пространства $\mathbb{R}^n$, сохраняющие начало координат, являются линейными отображениями. б) Какие из пространств задач 6а), 6б) 6в) изометричны?

Определение 3. *Нормированным полем* называется поле F с функцией $p\colon F\to\mathbb{R}$ (называемой *нормой*), которая удовлетворяет следующим условиям:
1) $p(x)\geqslant 0$ для любого $x\in F$;
2) $p(x)=0$ только при $x=0$;
3) $p(x)+p(y)\geqslant p(x+y)$ для любых $x,y\in F$;
4) $p(xy)=p(x)p(y)$ для любых $x,y\in F$.
Иногда вместо $p(x)$ пишут $|x|$.

Задача 13. Доказать, что следующие отображения являются нормами:
а) $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $x\mapsto|x|$;
б) $\mathbb{C}\to\mathbb{R}$, $a+bi\mapsto|a+bi|=\sqrt{a^2+b^2}$.

Задача 14. Описать все нормы а) на конечном поле; б)* на $\mathbb{Q}$.

Определение 4. *Нормированным линейным пространством* называется линейное пространство L над нормированным полем F с функцией $p\colon L\to\mathbb{R}$ (называемой *нормой*), которая удовлетворяет следующим условиям:

1) $p(x)\geqslant 0$ для любого $x\in L$;
2) $p(x)=0$ только при $x=0$;
3) $p(x)+p(y)\geqslant p(x+y)$ для любых $x,y\in L$;
4) $p(\lambda x)=|\lambda|p(x)$ для любых $\lambda\in F$, $x\in L$.
Иногда вместо $p(x)$ пишут $\|x\|$.

Задача 15. а) Пусть p — норма на линейном пространстве L. Доказать, что $\rho(x,y)=p(x-y)$ — метрика на L.
б) Какие метрики из задач этого листка могут быть получены таким способом?

Основная теорема алгебры

Листок 12д
март

Определение 1. Пусть E — поле, F — его подполе. Тогда E называется *расширением* F (обозначения: $E \supset F$, $F \subset E$). Размерность E как линейного пространства над F называется *степенью расширения* (обозначение: $[E:F]$).

Задача 1. Пусть $G \subset F \subset E$. Доказать, что $[E:G] < \infty$, если и только если одновременно $[E:F] < \infty$ и $[F:G] < \infty$. В этом случае $[E:G] = [E:F] \times \times [F:G]$.

Задача 2. а) Пусть $p \in F[x]$ — неприводимый многочлен степени n (то есть p не раскладывается в произведение многочленов положительной степени из $F[x]$). Доказать, что существуют расширение $E \supset F$ и элемент $\alpha \in E$, такие что $p(\alpha) = 0$ и $\{1, \alpha, \alpha^2, \ldots, \alpha^{n-1}\}$ — базис E над F.

б) Для любого $p \in F[x]$ найдется расширение поля F, в котором p раскладывается на линейные множители. Такое расширение называется *полем разложения* для p.

Определение 2. Пусть $F[x]^n (= F[x_1, x_2, \ldots, x_n])$ — пространство многочленов над F от n переменных. Многочлен называется *симметрическим*, если он не изменяется при перестановке любых двух его переменных. Пространство симметрических многочленов обозначим $SF[x]^n (= SF[x_1, x_2, \ldots, x_n])$.

Определение 3. Многочлены $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n \in SF[x]^n$,

$$\sigma_k(x) = \sum_{1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n} x_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_k},$$

называются *многочленами Виета*.

Определение 4. Многочлены $s_1, s_2, \ldots, s_n \in SF[x]^n$, $s_k(x) = \sum\limits_i x_i^k$ называются *многочленами Ньютона*.

Задача 3. Введем на множестве одночленов $x^m (= x_1^{m_1} x_2^{m_2} \ldots x_n^{m_n})$ так называемый *лексикографический порядок*: $(x^m > x^l) \iff (\exists k \;\; m_i = l_i$ при $i < k, m_k > l_k)$. Определим отображение $f : SF[x]^n \setminus \{0\} \to SF[x]^n$ следующим образом: если ax^m $(a \neq 0)$ — наибольший в смысле лексикографического порядка одночлен многочлена P, то $f(P) = P - a \prod\limits_{i=1}^{n} \sigma_i^{m_i - m_{i+1}}$ $(m_{n+1} = 0)$. Доказать, что для любого $P \in SF[x]^n$ при последовательном применении к P отображения f на некотором шаге мы получим 0.

Задача 4. Выразить s_k через $s_1, \ldots, s_{k-1}, \sigma_1, \ldots, \sigma_k$.

Задача 5. Выражаются ли многочлены Виета через многочлены Ньютона?

Задача 6. $\forall P \in SF[x]^n \; \exists Q \in F[\sigma]^n \;\; P = Q(\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n)$.

Задача 7. Пусть $p \in F[x]$, $F \subset E$, $p(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} (x - \alpha_i)$, $\alpha_i \in E$, $f \in SF[x]^n$. Доказать, что $f(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) \in F$.

Задача 8. Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(p) = 2k + 1$. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{R} \;\; p(\alpha) = 0$.

Задача 9. Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$, $p(\alpha) = 0$, $\alpha \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$. Тогда $p(x) = (x - \alpha) \times \times (x - \overline{\alpha}) q(x)$ для некоторого многочлена $q \in \mathbb{R}[x]$.

Задача 10. а) Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$, E — поле разложение для многочлена p, $p = \prod\limits_i (x - \alpha_i)$, $\alpha_i \in E$. Рассмотрим многочлен $q \in E[y]$,

$$q(y) = \prod_{i<j} (y - \alpha_i - \alpha_j - c\alpha_i \alpha_j).$$

Доказать, что при любом $c \in \mathbb{R}$ коэффициенты многочлена q действительны.

б) Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$, $\deg(p) = 2(2k + 1)$. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{C} \;\; p(\alpha) = 0$.

в) Пусть $p \in \mathbb{R}[x]$. Тогда $\exists \alpha \in \mathbb{C} \;\; p(\alpha) = 0$.

Определение 5. Поле F называется *алгебраически замкнутым*, если $\forall p \in F[x] \; \exists \alpha_i \in F \;\; p(x) = a \prod\limits_i (x - \alpha_i)$.

Задача 11 (*Основная теорема алгебры*). Поле $\mathbb{C}$ алгебраически замкнуто.

Определение 6. Расширение E поля F называется *алгебраическим*, если $\forall \alpha \in E \; \exists p \in F[x] \;\; p(\alpha) = 0$.

Задача 12. Верно ли, что

а) всякое конечномерное расширение алгебраично;

б) всякое алгебраическое расширение конечномерно?

Задача 13. Пусть $G \subset F \subset E$. Доказать, что расширение $E \supset G$ алгебраично тогда и только тогда, когда расширения $F \supset G$ и $E \supset F$ алгебраичны.

Задача 14. Назовем число $\alpha \in \mathbb{C}$ *алгебраическим*, если $\exists p \in \mathbb{Q}[x]$ $p(\alpha) = 0$. Доказать, что алгебраические числа образуют поле. Это поле обозначается $\overline{\mathbb{Q}}$.

Задача 15. Поле $\overline{\mathbb{Q}}$ алгебраически замкнуто.

<u>Задача 16.</u> Доказать, что для любого не более чем счетного поля F найдется расширение E, удовлетворяющее следующим условиям:

1) расширение $E \supset F$ алгебраично;

2) поле E алгебраически замкнуто.

Такое расширение называется *алгебраическим замыканием*.

<u>Задача 17.</u> Доказать, что алгебраическое замыкание единственно с точностью до изоморфизма: если E, E' — алгебраические замыкания (не более чем счетного) поля F, то существует изоморфизм $E \to E'$, ограничение которого на F тождественно.

Средние величины и классические неравенства

Листок 13д
апрель

<u>Определение 1.</u> Число $A = \frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}$ называется *средним арифметическим* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Определение 2.</u> Число $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$ $(\forall i \;\; a_i \geqslant 0)$ называется *средним геометрическим* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Задача 1.</u> Доказать следующие неравенства при условии, что числа a, b, c, d неотрицательны:

а) $\frac{a+b+c+d}{4} \geqslant \sqrt[4]{abcd}$; б) $\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$.

<u>Задача 2.</u> Доказать неравенство Коши: $G \leqslant A$. Доказать, что равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

<u>Задача 3.</u> Пусть $0 < x < +\infty$. Найти наименьшие значения функций:

а) $y = ax + \frac{b}{x}$, где $a > 0$, $b > 0$; б) $y = \frac{1}{x\sqrt{1-x^2}}$; в) $y = x + \frac{1}{x^2}$.

<u>Определение 3.</u> Число $S_m = \left(\frac{a_1^m + a_2^m + \ldots + a_n^m}{n}\right)^{1/m}$ называется *средним степенным порядка m* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Задача 4.</u> Доказать неравенство $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

<u>Задача 5.</u> Доказать неравенство $\left(\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}\right)^2 \leqslant \frac{a_1^2+a_2^2+\ldots+a_n^2}{n}$.

<u>Задача 6.</u> Пусть $\forall i \;\; a_i > 0$. Доказать, что

$$(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)\left(\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}\right) \geqslant n^2.$$

<u>Определение 4.</u> Число $H = \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}} = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$ называется *средним гармоническим* чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$.

<u>Задача 7.</u> Доказать, что $\min\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(a_i) \leqslant H \leqslant G \leqslant A \leqslant S_2 \leqslant \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant n}(a_i)$. Каков геометрический смысл этих неравенств при $n = 2$? (Рассмотрите трапецию с основаниями a_1 и a_2.)

<u>Задача 8.</u> Доказать неравенство Коши—Буняковского:

$$(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)(y_1^2 + y_2^2 + \ldots + y_n^2) \geqslant (x_1 y_1 + x_2 y_2 + \ldots + x_n y_n)^2.$$

Задача 9*. Пусть $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $a_i > 0$.
а) Доказать, что $A \leqslant S_m$ при $m > 1$;
б) Доказать, что $S_m \leqslant S_k$ при $m < k$;
в) Найти $\lim\limits_{m\to 0} S_m$, $\lim\limits_{m\to+\infty} S_m$, $\lim\limits_{m\to-\infty} S_m$.

Задача 10. Доказать неравенство Юнга: $\frac{x^p}{p} + \frac{y^q}{q} \geqslant xy$, если $p, q > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $x, y > 0$.

Задача 11*. Доказать неравенство Гёльдера:

$$(x_1^p + x_2^p + \ldots + x_n^p)^{1/p}(y_1^q + y_2^q + \ldots + y_n^q)^{1/q} \geqslant x_1y_1 + x_2y_2 + \ldots + x_ny_n,$$

где $p, q > 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $\forall i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ $x_i \geqslant 0$, $y_i \geqslant 0$.

Линейная алгебра V
Матрицы

Листок 14д
апрель

Определение 1. Пусть даны базис $(e_1, \ldots, e_m)$ линейного пространства L и базис $(g_1, \ldots, g_n)$ линейного пространства M. Пусть A — линейное отображение из L в M, $Ae_i = \sum a_i^j g_j$. Тогда набор чисел (a_i^j), записываемый в виде таблицы с m столбцами и n строками, называют *матрицей отображения* A в базисах (e_i), (g_j). Если $L = M$, $(e_i) = (g_j)$, то говорят о *матрице оператора* в базисе (e_i). Наконец, просто *матрицей* называют прямоугольную таблицу чисел (элементов поля).

Задача 1. Доказать, что отображение, сопоставляющее линейному отображению его матрицу в фиксированных базисах, взаимно однозначно.

Задача 2. Пусть (a_i^j) — матрица оператора A в базисах (e_i), (g_j). Обозначим через (f_i) базис, двойственный базису (g_i). Выразить $f^j(Ae_i)$ через (a_i^j).

Задача 3. Найти матрицы отображений задачи 1 листка 7д (Линейная алгебра II).

Задача 4. Пусть L — пространство многочленов степени не выше n с действительными коэффициентами. Доказать, что следующие отображения являются линейными, и найти их матрицы в базисе $(x^n, \ldots, x, 1)$: а) $Ap(x) = p(cx)$; б) $Ap(x) = p(x+s)$.

Задача 5. Пусть L_1, L_2, L_3 — конечномерные линейные пространства, в которых заданы базисы. Пусть (a_i^j), (b_i^j), (c_m^n) — матрицы отображений $A, B \in \operatorname{Hom}(L_1, L_2)$, $C \in \operatorname{Hom}(L_2, L_3)$ в этих базисах. Найти матрицы следующих отображений:
а) id (*единичная* матрица, обозначение: (δ_i^j) или E);
б) λA; в) $A + B$; г) CA (правило «строка на столбец»).

Задача 6. Если L и M — конечномерные пространства, $A\colon L \to M$ — линейное отображение, то можно выбрать базисы пространств L, M, в которых матрица A будет иметь следующий вид (число единиц в матрице может быть и равным нулю):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ \multicolumn{7}{c}{\dotfill} \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}.$$

Задача 7. а) Дать определение операций над матрицами, согласованных с операциями над линейными отображениями. Доказать, что указанное в задаче 1 отображение — изоморфизм линейных пространств.

б) Найти размерность и указать базис в пространстве матриц $k \times l$. Выразить $\dim \operatorname{Hom}(L, M)$ через $\dim L$ и $\dim M$.

Задача 8. Найти матрицу оператора A^n, если матрица оператора A имеет вид

а) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \hdotsfor{4} \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$; е) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; ж) $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$.

Задача 9. Найти все матрицы, коммутирующие с матрицей задачи 8г).

Задача 10. Пусть (a_i^j) — матрица оператора $A \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ в стандартном базисе ($e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$). Изобразить для $k = 1, 2$ множества $A^k([0, 1] \times [0, 1])$, где

а) $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; б) $(a_i^j) = \begin{pmatrix} -4 & -8 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$;

в) $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$; г) $(a_i^j) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 2 \end{pmatrix}$.

Задача 11. Пусть (a_i^j) — матрица оператора $A \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^2)$ в стандартном базисе ($e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$), $x \in \mathbb{R}^2$. Изобразить точки $A^k x$, $0 \leqslant k \leqslant n$, где

а) $(a_i^j) = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}$, $n = 40$, $x = (1, 0)$;

б) $(a_i^j) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, $n = 25$, $x = (9, -8.8)$, $x = (9, -9.2)$, $x = (9, -9)$;

в) $(a_i^j) = \frac{2}{5}\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$, $n = 20$, $x = (2, -11.6)$;

г) $(a_i^j) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 7 & 8 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$, $n = 20$, $x = (8, 0)$.

Задача 12. Пусть (e_i) — базис L_1, $(\tilde{e}_j)$ — базис L_2, $A \in \operatorname{Hom}(L_1, L_2)$, $C \in \operatorname{Aut}(L_1)$, $D \in \operatorname{Aut}(L_2)$. Выразить матрицу отображения A в базисах (Ce_i), $(D\tilde{e}_j)$ через матрицы отображений A, C, D^{-1} в базисах (e_i), $(\tilde{e}_j)$. Рассмотреть отдельно случай $L_1 = L_2$, $e_i = \tilde{e}_i$, $C = D$.

Задача 13. а) Какие операторы имеют матрицы, не зависящие от выбора базиса? б) Существуют ли операторы, матрицы которых меняются при любом изменении базиса?

Задача 14. Пусть (a_i^j) — матрица оператора A. Найти матрицу отображения A^t в сопряженном базисе.

Определение 2. *Элементарным преобразованием* над строками (столбцами) матрицы называется ее изменение одним из трех способов:

1) умножение некоторой строки (столбца) на ненулевое число;

2) прибавление к некоторой строке (столбцу) другой строки (столбца), умноженной (умноженного) на число;

3) перестановка двух строк (столбцов).

Задача 15. Какое преобразование базисов нужно сделать, чтобы матрица отображения изменилась элементарным образом?

Задача 16. Всякую матрицу элементарными преобразованиями можно привести к виду, указанному в задаче 6. Можно ли это сделать, пользуясь лишь элементарными операциями над строками (столбцами)?

Задача 17. Найти ранги следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix} 8 & 2 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 7 & 4 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 7 & 7 & 9 \\ 7 & 5 & 1 & -1 \\ 4 & 2 & -1 & -3 \\ -1 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \hdotsfor{6} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 18. Пусть $(e_1, \dots, e_m)$ — базис линейного пространства L, $(g_1, \dots, g_n)$ — базис линейного пространства M, (a_i^j) — матрица линейного отображения $A\colon L \to M$ в базисах (e_i), (g_j). Доказать, что условие $Ax = y$ эквивалентно системе уравнений $\sum\limits_i a_i^j x^i = y^j$, где $x = \sum x^i e_i$, $y = \sum y^j g_j$.

Задача 19. Система линейных уравнений $\sum_i a_i^j x^i = y^j$, $1 \leqslant i \leqslant m$, $1 \leqslant j \leqslant n$,

а) разрешима при любых (y^j), если $\mathrm{rk}(a_i^j) = n$;

б) имеет не более одного решения при любых (y^j), если $\mathrm{rk}(a_i^j) = m$;

в) равносильна системе $\sum_i \tilde{a}_i^j x^i = \tilde{y}^j$, где $n \times (m+1)$-матрица $(\tilde{a}_i^j \mid \tilde{y}^j)$ получена из матрицы $(a_i^j \mid y^j)$ элементарными преобразованиями над строками.

Задача 20. При помощи элементарных преобразований над строками найти все решения следующих систем (a — параметр):

а) $\begin{cases} -9x^1+6x^2+\ \ 7x^3+10x^4=3, \\ -6x^1+4x^2+\ \ 2x^3+\ \ 3x^4=2, \\ -3x^1+2x^2-11x^3-15x^4=1; \end{cases}$ б) $\begin{cases} -9x^1+10x^2+3x^3+7x^4=7, \\ -4x^1+\ \ 7x^2+\ \ x^3+3x^4=5, \\ \ \ 7x^1+\ \ 5x^2-4x^3-6x^4=3; \end{cases}$

в) $\begin{cases} -6x^1+8x^2-\ \ 5x^3-\ \ x^4=9, \\ -2x^1+4x^2+\ \ 7x^3+3x^4=1, \\ -3x^1+5x^2+\ \ 4x^3+2x^4=3, \\ -3x^1+7x^2+17x^3+7x^4=a; \end{cases}$ г) $\begin{cases} 2x^1-\ \ x^2+3x^3+\ \ 4x^4=5, \\ 4x^1-2x^2+5x^3+\ \ 6x^4=7, \\ 6x^1-3x^2+7x^3+\ \ 8x^4=9, \\ ax^1-4x^2+9x^3+10x^4=11; \end{cases}$

д) $\begin{cases} (1+a)x^1+x^2+x^3=a^2+3a, \\ x^1+(1+a)x^2+x^3=a^3+3a^2, \\ x^1+x^2+(1+a)x^3=a^4+3a^3. \end{cases}$

Задача 21. Пусть некоторая последовательность элементарных преобразований только над строками (только над столбцами) приводит матрицу (a_i^j) оператора $A \in \mathrm{Aut}(L)$ к (δ_i^j). Доказать, что те же элементарные преобразования приведут матрицу (δ_i^j) к матрице оператора A^{-1}.

Задача 22. Найти матрицы, обратные к следующим:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Задача 23*. Пусть L конечномерно и множество $W \subset \mathrm{End}(L)$ порождает $\mathrm{End}(L)$ в том смысле, что всякий эндоморфизм пространства L представим в виде линейной комбинации произведений некоторого числа элементов из W. Какое минимальное число элементов может быть в W?

Десятый класс

Непрерывные отображения

Листок 15д
сентябрь

Определение 1. Пусть (X, ρ) — метрическое пространство. *Открытым (замкнутым) шаром* радиуса $\varepsilon > 0$ с центром в точке $x \in X$ называется множество $\{y \in X \mid \rho(x, y) < \varepsilon\}$ ($\{y \in X \mid \rho(x, y) \leqslant \varepsilon\}$). Обозначения: $U_\varepsilon(x)$, $B_\varepsilon(x)$.

Задача 1. Как выглядят шары в пространствах задач 4, 6а), 6б), 6в), 7 листка 11д?

Задача 2. Пусть $U_\varepsilon(x) \subset U_\delta(y)$, $U_\varepsilon(x) \neq U_\delta(y)$. Обязательно ли а) $\varepsilon \leqslant \delta$; б) $\varepsilon \leqslant 2\delta$; в) $U_\varepsilon(y) \subset U_\delta(x)$?

Определение 2. Подмножество $A \subset X$ называется *открытым*, если $\forall x \in A\ \exists \varepsilon > 0\ \ U_\varepsilon(x) \subset A$. Подмножество $B \subset X$ называется *замкнутым*, если $X \backslash B$ открыто.

Задача 3. Доказать, что открытый шар открыт, замкнутый шар замкнут.

Задача 4. Доказать, что $\varnothing$ и X одновременно открыты и замкнуты как подмножества метрического пространства X.

Задача 5. Доказать, что пересечение и объединение конечного числа открытых (замкнутых) множеств открыто (замкнуто). Останутся ли эти утверждения верными при замене конечного числа произвольным?

Задача 6. Пусть Y — подпространство метрического пространства X, A — открытое (замкнутое) подмножество Y. Обязательно ли A открыто (замкнуто) как подмножество X?

Определение 3. Точка $a \in X$ называется *пределом* последовательности (x_n) элементов X, если всякое открытое множество, содержащее a, содержит почти все члены последовательности (x_n).

Определение 4. Точка $a \in X$ называется *предельной точкой* множества $A \subset X$, если для любого открытого множества W, содержащего a, множество $W \cap (A \backslash \{a\})$ непусто.

Задача 7. Точка a является предельной точкой множества A, если и только если существует последовательность элементов $A \backslash \{a\}$, сходящаяся к a.

<u>Определение 5.</u> *Замыканием* множества A называется объединение A и множества его предельных точек. Обозначение: $\overline{A}$.

<u>Задача 8.</u> Доказать, что замыкание замкнуто.

<u>Определение 6.</u> Пусть (X,ρ), (Y,σ) — метрические пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ называется *непрерывным в точке* x, если для любой последовательности (x_n), сходящейся к x, последовательность $(f(x_n))$ сходится к $f(x)$; *непрерывным*, если оно непрерывно в каждой точке пространства X.

<u>Определение 7.</u> Пусть (X,ρ), (Y,σ) — метрические пространства. Отображение $f\colon X\to Y$ называется *непрерывным*, если прообраз любого открытого подмножества Y открыт.

<u>Задача 9.</u> Доказать эквивалентность определений непрерывности отображений.

<u>Задача 10.</u> Какие из следующих условий эквивалентны непрерывности отображения $f\colon X\to Y$?

а) Образ открытого множества открыт.

б) Образ замкнутого множества замкнут.

в) Прообраз замкнутого множества замкнут.

г) Для любого $A\subset X$ $f(\overline{A})\subset\overline{f(A)}$.

д) График $\{(x,f(x))\}\subset X\times Y$ замкнут (в метрике задачи 5а) листка 11д).

<u>Задача 11.</u> Композиция непрерывных отображений непрерывна.

<u>Определение 8.</u> Непрерывное взаимно однозначное отображение f из пространства (X,ρ) в пространство (Y,σ) называется *гомеоморфизмом*, если f^{-1} непрерывно. Пространства (X,ρ), (Y,σ) при этом называют *гомеоморфными*.

<u>Задача 12.</u> Привести пример непрерывного взаимно однозначного отображения, не являющегося гомеоморфизмом.

<u>Определение 9.</u> Метрики ρ_1, ρ_2 на множестве X называются (*топологически*) *эквивалентными*, если тождественное отображение есть гомеоморфизм между (X,ρ_1) и (X,ρ_2).

<u>Задача 13.</u> Метрики эквивалентны тогда и только тогда, когда определяемые ими наборы открытых множеств совпадают.

<u>Задача 14.</u> Если $f\colon X\to Y$ — непрерывное отображение, то оно останется непрерывным при замене метрик в X и Y на эквивалентные.

<u>Задача 15.</u> Какие из метрик задач 4—6 листка 11д эквивалентны?

<u>Задача 16.</u> Какие из следующих отображений $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ непрерывны; являются гомеоморфизмами:

а) $(x,y)\mapsto(x+x^5,\,x^2+y+e^{\sin x\cos y})$;

б) $(x,y)\mapsto(x^m+y^m,\,x^n+y^n)$, $m,n\in\mathbb{N}$;

в) $(x,y)\mapsto(x+y+\sin x,\,x-y+\cos y)$?

<u>Задача 17.</u> Доказать, что если замкнутые множества $A,B\subset X$ не пересекаются, то найдется такая непрерывная функция $f\colon X\to\mathbb{R}$, что $A=f^{-1}(0)$, $B=f^{-1}(1)$.

<u>Определение 10.</u> Метрическое пространство называется *несвязным*, если оно представимо в виде объединения двух непустых непересекающихся открытых множеств. Метрическое пространство, не являющееся несвязным, называется *связным*.

<u>Определение 11.</u> Метрическое пространство X называется *линейно связным*, если для любой пары точек x_0, $x_1\in X$ найдется такое непрерывное отображение $f\colon[0,1]\to X$, что $f(0)=x_0$, $f(1)=x_1$.

<u>Задача 18.</u> Доказать, что

а) отрезок связен;

б) образ (линейно) связного множества при непрерывном отображении (линейно) связен;

в) линейно связное множество связно.

<u>Задача 19.</u> Множество $(\{0\}\times[-1,1])\cup\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\,\middle|\,x>0\right\}\subset\mathbb{R}^2$ связно, но не линейно связно.

<u>Задача 20.</u> Связное открытое подмножество $\mathbb{R}^n$ линейно связно.

<u>Задача 21.</u> Для каждой пары, составленной из следующих множеств (подпространств $\mathbb{R}^2$), указать, существуют ли

а) гомеоморфизм между ними;

б) непрерывное отображение одного множества *на* другое (то есть такое отображение $f\colon X\to Y$, что $f(X)=Y$):

1) отрезок; 2) интервал; 3) полуинтервал; 4) прямая;

5) $\{(x,y)\,|\,xy=0\}$; 6) $\left\{\left(x,\sin\frac{1}{x}\right)\,\middle|\,x>0\right\}$;

7) множество из задачи 19; 8) —40) буквы русского алфавита.

Приближение действительных чисел рациональными

Листок 16д
декабрь

<u>Задача 1.</u> Во всех клетках бесконечной шахматной доски сидят одинаковые (и одинаково расположенные) зайцы. Охотник стреляет по направлению с иррациональным тангенсом угла наклона к линиям доски. Доказать, что он попадет хотя бы в одного зайца. Доказать, что при рациональном тангенсе угла наклона можно расположить зайцев так, что охотник промахнется.

<u>Задача 2.</u> Конь прыгает скачками $(x, y) \mapsto (x + \sqrt{2}, y + \sqrt{3})$ по полю, на котором квадратно-гнездовым способом (в целых точках) посеяна кукуруза. Доказать, что он сшибет хотя бы один росток.

<u>Задача 3.</u> Сформулировать и доказать обобщения утверждений задач 1 и 2, в которых участвует пространство $\mathbb{R}^n$ вместо пространства $\mathbb{R}^2$.

<u>Задача 4.</u> Десятичная запись числа 2^n может начинаться с любой конечной последовательности цифр.

<u>Задача 5.</u> Обозначим через $N_i(n)$ количество таких $k \leqslant n$, что десятичная запись числа 2^k начинается с цифры i. Доказать, что существует предел $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{N_i(n)}{n}$, и найти его.

<u>Определение 1.</u> Число x называется *t-приближаемым*, если найдутся такие последовательности (p_n), (q_n), $p_n \in \mathbb{Z}$, $q_n \in \mathbb{N}$, что $\frac{p_n}{q_n} \neq x$ и $q_n^t\left(x - \frac{p_n}{q_n}\right) \to 0$ при $n \to \infty$.

<u>Определение 2.</u> Число x называется *t-неприближаемым*, если найдется такое $c > 0$, что при любых $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ либо $x = \frac{p}{q}$, либо $\left|x - \frac{p}{q}\right| > \frac{c}{q^t}$.

<u>Задача 6.</u> Число x не является t-приближаемым тогда и только тогда, когда оно t-неприближаемо.

<u>Задача 7.</u> Рациональные числа 1-неприближаемы.

<u>Задача 8.</u> Для всякого иррационального x найдется бесконечно много таких рациональных чисел $\frac{p}{q}$ $(p \in \mathbb{Z}, q \in \mathbb{N})$, что $\left|x - \frac{p}{q}\right| \leqslant \frac{1}{q^2}$.

<u>Задача 9.</u> Пусть x — корень некоторого многочлена степени n с целыми коэффициентами. Доказать, что число x n-неприближаемо.

<u>Задача 10.</u> Привести пример действительного числа, которое является n-приближаемым для любого n.

<u>Задача 11.</u> Доказать, что множество действительных чисел, являющихся t-приближаемыми для какого-нибудь $t > 2$, имеет меру нуль.

Линейная алгебра VI
Тензорные формы

Листок 17д
декабрь

Определение 1. Пусть L — линейное пространство над F. *Тензорной k-формой* (*k-линейным функционалом*) на L называется отображение $u\colon L\times\ldots\times L\to F$, удовлетворяющее условию $\forall l\in\{1,\ldots,k\}$ $\forall\lambda\in F$

$$u(x_1,\ldots,x_l+\lambda y,\ldots,x_k)=u(x_1,\ldots,x_l,\ldots,x_k)+\lambda u(x_1,\ldots,y,\ldots,x_k).$$

Число k называют *степенью* формы u. Пространство k-линейных функционалов обозначается $T^k(L)$. Формально полагают $T^0(L)=F$.

Задача 1. $T^1(L)=L^t$ для всякого линейного пространства L.

Задача 2. Пусть (e_i) — базис $\mathbb{R}^n$, $x=\sum x^ie_i$, $y=\sum y^ie_i$, $z=\sum z^ie_i$, $x_j=\sum x_j^ie_i$. Являются ли следующие функционалы тензорными k-формами?

а) $u(x,y)=x^1y^1, n=1$; б) $u(x,y)=x^1y^1, n=2$; в) $u(x,y)=(x^1)^2y^1$, $n=1$;
г) $u(x,y,z)=x^2y^2, n=3$; д) $u(x,y)=\sqrt{(x^1)^2+(y^1)^2}, n=2$;
е) $u(x,y)=x^1y^2+x^2y^1, n=2$; ж) $u(x,y)=x^1y^2-x^2y^1, n=2$;
з) $u(x,y,z)=x^2y^1z^3-y^2z^1, n=3$;
и) $u(x,y,z)=x^1y^2z^2-3x^2y^2z^2+11x^1y^1z^2, n=3$;
к) $u(x,y,z)=2x^2y^1z^2-5x^1y^3z^1+x^3y^1z^2, n=3$;
л) $u(x,y)=\sum a_{ij}x^iy^j, n=2$; м) $u(x_1,\ldots,x_n)=\sum\limits_{i_1,\ldots,i_n}a_{i_1\ldots i_n}x_1^{i_1}\ldots x_n^{i_n}$;
н) скалярное произведение двух векторов в $\mathbb{R}^3$.

Определение 2. *Тензорным произведением* тензорных форм $u_1\in T^p(L)$, $u_2\in T^q(L)$ называется форма $u_3=u_1\otimes u_2\in T^{p+q}(L)$, определяемая равенством $u_3(x_1,\ldots,x_{p+q})=u_1(x_1,\ldots,x_p)\cdot u_2(x_{p+1},\ldots,x_{p+q})$.

Задача 3. Верно ли, что тензорное произведение
а) ассоциативно; б) коммутативно; в) дистрибутивно?

Задача 4. Всякая ли тензорная форма разлагается в произведение двух форм положительной степени?

Задача 5. а) Пусть (f^i) — базис в L^t. Верно ли, что всевозможные тензорные произведения форм f^i образуют базис в $T^k(L)$?
б) Найти $\dim T^k(F^n)$.

Определение 3. Полилинейный функционал на L называется *симметрическим*, если его значение остается неизменным при любой перестановке его аргументов. Пространство симметрических функционалов от k аргументов (называемых также *симметрическими k-формами*) обозначается $S^k(L)$.

Задача 6. Какие из функционалов задачи 2 симметрические?

Определение 4. Отображение $\mathrm{Sym}\colon T^n(L)\to T^n(L)$, задаваемое формулой

$$\mathrm{Sym}(u)(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}u(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}),$$

где S_n — множество подстановок из n элементов, называется *симметризацией*.

Задача 7. а) $\mathrm{Sym}\in\mathrm{End}(T^n(L))$.
б) $\mathrm{im}\,\mathrm{Sym}\subset S^n(L)$.
в) Если $v\in S^n(L)$, то $\mathrm{Sym}(v)=n!\,v$.
г) Симметризовать функционалы задачи 2.

Определение 5. Функционал $u\in T^n(L)$ называется *кососимметрическим*, если $u(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n)=-u(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n)$ для любой пары различных индексов i,j. Пространство кососимметрических функционалов (*косых форм*) обозначается $\Lambda^n_{\mathrm{sc}}(L)$.

Определение 6. Функционал $u\in T^n(L)$ называется *кососимметрическим*, если $\forall\sigma\in S_n$ $u(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)})=\mathrm{sign}(\sigma)\cdot u(x_1,\ldots,x_n)$. *Знак* $\mathrm{sign}(\sigma)$ подстановки σ равен 1, если подстановка σ четная, и -1, если нечетная.

Задача 8. Определения 5 и 6 эквивалентны.

Определение 7. Функционал $u\in T^n(L)$ называется *знакопеременным*, если он обращается в нуль при совпадении любых двух своих аргументов. Пространство знакопеременных функционалов (*внешних форм*) обозначается $\Lambda^n(L)$.

Задача 9. $\Lambda^n(L)\subset\Lambda^n_{\mathrm{sc}}(L)$.

Задача 10. Пусть L — линейное пространство над полем F, $\mathrm{char}\,F\neq 2$. Тогда
а) $\Lambda^n(L)=\Lambda^n_{\mathrm{sc}}(L)$; б) $T^2(L)=S^2(L)\oplus\Lambda^2(L)$.

Задача 11. Пусть L — линейное пространство над полем F, $\mathrm{char}\,F=2$. Какие из следующих утверждений верны?
а) $\Lambda^n(L)=\Lambda^n_{\mathrm{sc}}(L)$; б) $\Lambda^n_{\mathrm{sc}}(L)=S^n(L)$; в) $T^2(L)=S^2(L)\oplus\Lambda^2(L)$.

Определение 8. Отображение $\mathrm{alt}\colon T^n(L)\to T^n(L)$, задаваемое формулой

$$\mathrm{alt}(u)(x_1,\ldots,x_n)=\sum_{\sigma\in S_n}\mathrm{sign}(\sigma)\cdot u(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}),$$

называется *альтернированием*.

Задача 12. а) $\mathrm{alt}\in\mathrm{End}(T^n(L))$.
б) $\mathrm{im}\,\mathrm{alt}\subset\Lambda^n(L)$.

в) Если $\omega \in \Lambda^n(L)$, то $\mathrm{alt}(\omega) = n!\,\omega$.
г) Проальтернировать функционалы задачи 2.

Определение 9. Пусть L — линейное пространство над полем F, $\mathrm{char}\, F = 0$. Тогда *внешним произведением* $\omega_1 \wedge \omega_2$ внешних форм $\omega_1 \in \in \Lambda^p(L)$ и $\omega_2 \in \Lambda^q(L)$ называется внешняя форма $\dfrac{1}{p!\,q!}\,\mathrm{alt}(\omega_1 \otimes \omega_2)$.

Определение 10. *Внешним произведением* $\omega_1 \wedge \omega_2$ внешних форм $\omega_1 \in \Lambda^p(L)$ и $\omega_2 \in \Lambda^q(L)$ называется внешняя форма

$$\omega(x_1, \ldots, x_{p+q}) = \sum_{\sigma \in K} \mathrm{sign}(\sigma) \cdot \omega_1(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(p)}) \cdot \omega_2(x_{\sigma(p+1)}, \ldots, x_{\sigma(p+q)}),$$

где $K \subset S_{p+q}$ состоит из таких подстановок σ, что $\sigma(i) < \sigma(j)$ при $1 \leqslant i < j \leqslant p$ и $p+1 \leqslant i < j \leqslant p+q$.

Задача 13. Доказать, что определение 11 корректно и согласовано с определением 10.

Задача 14. а) $(\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3 = \omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3)$;
б) $\omega_1 \wedge (\omega_2 + \omega_3) = \omega_1 \wedge \omega_2 + \omega_1 \wedge \omega_3$;
в) если $\omega_1 \in \Lambda^p(L)$, $\omega_2 \in \Lambda^q(L)$, то $\omega_1 \wedge \omega_2 = (-1)^{pq} \omega_2 \wedge \omega_1$ (*суперкоммутативность*).

Задача 15. Пусть $\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in T^1(L)$. Тогда

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_k = \mathrm{alt}(\alpha_1 \otimes \ldots \otimes \alpha_k).$$

Задача 16. Пусть (e_1, e_2, e_3) — базис L, (f^1, f^2, f^3) — двойственный ему базис. Вычислить
а) $f^1 \wedge f^2(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3)$;
б) $f^1 \wedge f^2 \wedge f^3(ae_1 + be_2 + ce_3, a'e_1 + b'e_2 + c'e_3, a''e_1 + b''e_2 + c''e_3)$.

Задача 17. а) Пусть $(f^1, \ldots, f^n)$ — базис L^t. Доказать, что всевозможные внешние произведения $f^{i_1} \wedge f^{i_2} \wedge \ldots \wedge f^{i_k}$, $1 \leqslant i_1 < i_2 < \ldots < i_k \leqslant n$ образуют базис пространства $\Lambda^k(L)$.
б) Найти $\dim \Lambda^k(F^n)$.

Определение 11. Пусть $A \in \mathrm{Hom}(L_1, L_2)$. Тогда отображение A определяет отображение $A^*\colon T^n(L_2) \to T^n(L_1)$ формулой $A^*u(x_1, \ldots, x_n) = = u(Ax_1, \ldots, Ax_n)$.

Задача 18. а) $A^* \in \mathrm{Hom}(T^n(L_2), T^n(L_1))$; б) при $n = 1$ $A^* = A^t$;
в) $A^* S^k(L_2) \subset S^k(L_1)$, $A^* \Lambda^k_{\mathrm{sc}}(L_2) \subset \Lambda^k_{\mathrm{sc}}(L_1)$;
г) $\mathrm{Sym}\, A^* = A^*\, \mathrm{Sym}$, $\mathrm{alt}\, A^* = A^*\, \mathrm{alt}$;
д) $A^*(u_1 \otimes u_2) = A^*(u_1) \otimes A^*(u_2)$; е) $A^*(\omega_1 \wedge \omega_2) = A^*(\omega_1) \wedge A^*(\omega_2)$;
ж) при $t_i \in T^1(L)$ $A^*(t_1 \wedge \ldots \wedge t_k) = A^t(t_1) \wedge \ldots \wedge A^*(t_k)$; з) $(AB)^* = B^* A^*$.

Задача 19. Назовем тензорные формы $\omega_1, \omega_2 \in T^k(L)$ *подобными*, или *эквивалентными*, если найдется такой автоморфизм A пространства L, что $A^*\omega_1 = \omega_2$. Найти классы эквивалентности элементов следующих подпространств:
а) $\Lambda^{n-1}(F^n)$; б)* $\Lambda^2(\mathbb{R}^n)$; в)* $S^2(\mathbb{R}^n)$; г)* $S^2(\mathbb{Z}_2^n)$.

Определение 12. *Формой объема* на конечномерном пространстве L называется элемент пространства $\Lambda^{\dim L}(L)$. *Определителем* (*детерминантом*) оператора $A \in \mathrm{End}(L)$ называется такое число, обозначаемое $\det A$, что $A^*\omega = \det A \cdot \omega$ при любой форме объема ω.

Задача 20. а) Доказать корректность определения 12.
б) Выразить $\det \lambda A$ через λ и $\det A$.
в) Доказать, что $\det AB = \det A \cdot \det B$.

Задача 21*. Пусть $D\colon \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \to \mathbb{C}$, $D(AB) = D(A)D(B)$, $D(\lambda \cdot \mathrm{id}) = \lambda^n$. Тогда $D = \det$.

Задача 22. Пусть $A \in \mathrm{End}(L)$, $(e_1, \ldots, e_n)$ — базис L, $(f^1, \ldots, f^n)$ — двойственный ему базис. Тогда
а) $\det A = (A^t f^1 \wedge \ldots \wedge A^t f^n)(e^1, \ldots, e^n) = (f^1 \wedge \ldots \wedge f^n)(Ae^1, \ldots, Ae^n)$;
б) $\det A^t = \det A$; в) $(\det A \neq 0) \iff (A \in \mathrm{Aut}(L))$.

Задача 23. Пусть (a_i^j) — матрица оператора A в некотором базисе. Выразить $\det A$ через числа a_i^j.

Одиннадцатый класс

Интегрирование. Критерий Лебега

Листок 18д
сентябрь

Определение 1. *Колебанием функции* $f\colon M\to\mathbb{R}$ на множестве $A\subset M$ называется число $\omega_f(A)=\sup f(A)-\inf f(A)$.

Определение 2. *Колебанием функции* $f\colon M\to\mathbb{R}$ в точке $x\subset M$ называется число $\omega_f(x)=\lim\limits_{\varepsilon\to 0}\omega_f([x-\varepsilon, x+\varepsilon]\cap M)$.

Задача 1. Для того чтобы функция f была непрерывной в точке x, необходимо и достаточно, чтобы $\omega_f(x)=0$.

Определение 3. Множество $A\subset\mathbb{R}$ называется множеством *лебеговой* (*жордановой*) *меры нуль*, если для любого $\varepsilon>0$ найдется такое покрытие множества A счетным (конечным) множеством интервалов, суммарная длина которых меньше ε. Обозначение: $\mu(A)=0$ ($\mu_j(A)=0$).

Задача 2. а) Если $\mu_j(A)=0$, то $\mu(A)=0$.

б) Подмножество множества меры нуль имеет меру нуль.

в) Объединение счетного (конечного) числа множеств лебеговой (жордановой) меры нуль имеет лебегову (жорданову) меру нуль.

г) Счетное множество имеет лебегову меру нуль.

д) Множество рациональных чисел не имеет жордановой меры нуль.

е) Канторово множество имеет жорданову меру нуль.

Задача 3. Из всякого покрытия замкнутого ограниченного подмножества $\mathbb{R}$ интервалами можно выделить конечное покрытие.

Задача 4. Пусть $K\subset\mathbb{R}$ — замкнутое ограниченное множество и $\mu(K)=0$. Тогда $\mu_j(K)=0$.

Задача 5. Отрезок $[a, b]$ не имеет меры нуль.

Задача 6. Пусть колебание функции f в каждой точке отрезка $[a, b]$ не превосходит C. Тогда для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $\delta>0$, что для любого отрезка $I\subset[a, b]$, длина которого меньше δ, колебание функции на I меньше $C+\varepsilon$.

Задача 7. Для любого $\varepsilon>0$ множество таких точек отрезка $[a, b]$, в которых колебание функции $f\colon[a, b]\to\mathbb{R}$ больше или равно ε, замкнуто.

Указание. Функция, непрерывная на отрезке, равномерно непрерывна на нем.

Задача 8 (*Критерий Лебега*). Для того чтобы ограниченная на отрезке $[a, b]$ функция f была интегрируема по Риману на этом отрезке, необходимо и достаточно, чтобы множество точек разрыва f имело лебегову меру нуль.

Линейная алгебра VII
Свойства определителя

Листок 19д
октябрь

Задача 1. Как изменяется определитель матрицы при элементарных преобразованиях? При транспонировании матрицы ($(a_i^j)\mapsto(a_j^i)$)? При повороте ее на $90°$?

Задача 2. Доказать, что $\det(a_i^j)$ есть многочлен первой степени по каждой переменной (a_k^l). Коэффициенты при элементах a_k^l называются их *алгебраическими дополнениями* и обозначаются $\tilde{a}_l^k$. Выразить $\tilde{a}_l^k$ через определитель матрицы, полученной из (a_i^j) вычеркиванием k-го столбца и l-й строки.

Задача 3 (*Формула разложения по строке или по столбцу*). Доказать, что $\det(a_i^j)=\sum\limits_k a_k^l\tilde{a}_l^k=\sum\limits_k a_l^k\tilde{a}_k^l$ для любого l.

Задача 4. Доказать, что $((a_i^j)^{-1})_k^l=\tilde{a}_k^l(\det(a_i^j))^{-1}$.

Задача 5. Выразить $\det(\tilde{a}_i^j)$ через $\det(a_i^j)$.

Задача 6 (*Правило Крамера*). Пусть дана такая система уравнений $\sum\limits_i a_i^j x^i=b^j$, что $\det(a_i^j)\neq 0$, и пусть Δ_k — определитель матрицы, полученной из (a_i^j) заменой k-го столбца на столбец b^j. Тогда набор чисел $x^n=\dfrac{\Delta_n}{\det(a_i^j)}$ есть решение данной системы.

Задача 7. Доказать, что $\det\begin{pmatrix}A & B\\ 0 & C\end{pmatrix}=\det A\cdot\det C$.

Задача 8. Доказать, что матрица, обратная к целочисленной матрице, целочисленна тогда и только тогда, когда модуль ее определителя равен единице.

Задача 9. Доказать, что если (a_i^j) — матрица $(2n+1)\times(2n+1)$ над полем характеристики ноль и $a_i^j=-a_j^i$, то $\det(a_i^j)=0$.

Задача 10. Найти определители следующих матриц:

а) $\begin{pmatrix}x & y & 0 & \dots & 0 & 0\\ 0 & x & y & \dots & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & y\\ y & 0 & 0 & \dots & 0 & x\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}1001 & 1002 & 1003 & 1004\\ 1002 & 1003 & 1001 & 1002\\ 1001 & 1001 & 1001 & 999\\ 1001 & 1000 & 998 & 999\end{pmatrix}$;

в) $\begin{pmatrix}p & q & q & \dots & q & q\\ q & p & q & \dots & q & q\\ q & q & p & \dots & q & q\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ q & q & q & \dots & q & p\end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 1 & 2 & 1 & \dots & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$;

д) $\begin{pmatrix}1 & 1 & \dots & 1\\ x_1 & x_2 & \dots & x_n\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ x_1^{n-1} & x_2^{n-1} & \dots & x_n^{n-1}\end{pmatrix}$.

Задача 11. Выразить через коэффициенты многочленов $p_1,\dots,p_n$, удовлетворяющих условию $\deg(p_i)<i$, определитель матрицы $(a_i^j)=(p_j(x_i))$.

Полнота и компактность

Листок 20д
октябрь

Определение 1. Последовательность (x_n) элементов метрического пространства (X, ρ) называется *фундаментальной*, если $\forall \varepsilon > 0\ \exists k$ $\forall m, n > k\ \ \rho(x_m, x_n) < \varepsilon$.

Задача 1. Доказать, что всякая сходящаяся последовательность фундаментальна. Верно ли обратное утверждение?

Определение 2. Метрическое пространство называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится.

Задача 2. Какие из пространств задач 4, 6 листка 11д полны?

Задача 3. Верно ли, что метрическое пространство, гомеоморфное полному пространству, полно?

Задача 4. Доказать, что
а) полное подпространство метрического пространства замкнуто;
б) замкнутое подмножество полного метрического пространства полно.

Задача 5. В полном метрическом пространстве последовательность вложенных замкнутых шаров с радиусами, стремящимися к нулю, имеет общий элемент.

Задача 6. Можно ли в задаче 5 убрать условие полноты пространства или стремления к нулю радиуса шаров?

Определение 3. Отображение метрического пространства в себя называется *сжимающим*, если найдется такое $c < 1$, что $\forall x, y \in X$ $\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y)$.

Задача 7. Сжимающее отображение непрерывно.

Задача 8. Сжимающее отображение полного метрического пространства в себя имеет ровно одну неподвижную точку.

Задача 9. Останется ли верным утверждение задачи 8, если
а) убрать условие полноты;
б) в определении 3 заменить условие $\rho(f(x), f(y)) \leqslant c\rho(x, y)$ на следующее условие: $\rho(f(x), f(y)) < \rho(x, y)$ при $x \neq y$?

Определение 4. Подмножество метрического пространства называется *нигде не плотным*, если его замыкание не имеет непустых открытых подмножеств.

Задача 10. Доказать, что непустое полное метрическое пространство нельзя представить в виде объединения счетного числа нигде не плотных множеств.

Определение 5. *Пополнением* метрического пространства (X, ρ) называется метрическое пространство $(\tilde{X}, \tilde{\rho})$, где $\tilde{X}$ — множество классов эквивалентности фундаментальных последовательностей в (X, ρ), определяемой следующим образом: $(x_n) \sim (x'_n)$ тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, x'_n) = 0$; метрика $\tilde{\rho}$ задается формулой $\tilde{\rho}([(x_n)], [(y_n)]) = \lim\limits_{n\to\infty} \rho(x_n, y_n)$.

Задача 11. Доказать, что определение 5 корректно и отображение пространства в свое пополнение, переводящее точку x в класс постоянной последовательности, все члены которой равны x, есть изометрическое вложение.

Задача 12. Пополнение полно.

Задача 13. Пополнение подпространства (A, ρ_A) полного метрического пространства (X, ρ) изометрично замыканию A как подмножества (X, ρ).

Задача 14. Пополнение нормированного поля имеет естественную структуру нормированного поля.

Задача 15. Пополнение нормированного линейного пространства над нормированным полем имеет естественную структуру нормированного линейного пространства над пополнением поля.

Определение 6. Метрическое пространство называется *компактным*, если из любого его покрытия открытыми множествами можно выделить конечное подпокрытие.

Задача 16. Доказать, что
а) замкнутое подмножество компакта компактно;
б) компактное подпространство метрического пространства замкнуто;
в) образ компакта при непрерывном отображении компактен;
г) непрерывное взаимно однозначное отображение компакта есть гомеоморфизм.

Определение 7. Подмножество A метрического пространства (X, ρ) называется *ε-сетью*, если $\forall x \in X\ \exists a \in A\ \ \rho(a, x) < \varepsilon$.

<u>Задача 17.</u> Доказать, что метрическое пространство (X, ρ) компактно тогда и только тогда, когда

а) из любой последовательности элементов X можно выделить сходящуюся подпоследовательность;

б) (X, ρ) полно и для любого положительного ε в X есть конечная ε-сеть;

в) всякое бесконечное подмножество X имеет предельную точку;

г) всякая последовательность вложенных замкнутых множеств имеет общий элемент;

д) всякая непрерывная функция на X ограничена;

е) для всякой непрерывной функции на X множество ее значений содержит свою точную верхнюю грань.

<u>Задача 18.</u> Доказать, что всякая непрерывная функция на компакте равномерно непрерывна.

<u>Задача 19.</u> Доказать, что подмножество евклидова пространства $\mathbb{R}^n$ компактно тогда и только тогда, когда оно замкнуто и ограничено.

<u>Задача 20.</u> Пусть λ, μ — нормы на линейном пространстве $\mathbb{R}^n$. Доказать, что найдутся такие положительные числа c_1, c_2, что $c_1\lambda \leqslant \mu \leqslant c_2\lambda$.

<u>Задача 21.</u> Пусть (X, ρ), (Y, σ) — метрические пространства, (X, ρ) компактно. Рассмотрим множество $C((X, \rho), (Y, \sigma))$, состоящее из непрерывных отображений $(X, \rho) \to (Y, \sigma)$. (Обычно $C((X, \rho), (Y, \sigma))$ сокращают до $C(X, Y)$; если (Y, σ) есть $\mathbb{R}$ с евклидовой метрикой, то вместо $C(X, Y)$ пишут $C(X)$.) Доказать, что

а) функция $\tau(f_1, f_2) = \sup\limits_{x \in X} \sigma(f_1(x), f_2(x))$ есть метрика на $C(X, Y)$;

б) если (Y, σ) полно, то пространство $(C(X, Y), \tau)$ также полно.

<u>Задача 22.</u> Пусть (f_n) — монотонная последовательность непрерывных функций на компакте X, поточечно сходящаяся к непрерывной функции f. Доказать, что $f_n \to f$ в $C(X)$. Останется ли верным это утверждение, если убрать условие монотонности?

<u>Задача 23.</u> Пусть (X, ρ) — компакт, подмножество $V \subset C(X)$ удовлетворяет следующим условиям: (1) найдется такое $c \in \mathbb{R}$, что $|f| \leqslant c$ для всех $f \in V$; (2) для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех $f \in V$ из $\rho(x_1, x_2) \leqslant \delta$ вытекает $|f(x_1) - f(x_2)| \leqslant \varepsilon$. Тогда замыкание V компактно.

<u>Задача 24.</u> Доказать, что последовательность функций (f_n), где

$$f_0 = 0, \quad f_{n+1}(x) = f_n(x) + \frac{1}{2}(x^2 - f_n^2(x)),$$

равномерно сходится на отрезке $[-1, 1]$, и найти ее предел.

<u>Задача 25.</u> Пусть X — компакт. Множество $A \subset C(X)$ называется *подалгеброй*, если оно содержит все постоянные функции и замкнуто относительно сложения и умножения. Доказать, что замыкание подалгебры есть подалгебра.

<u>Задача 26.</u> Пусть A — подалгебра пространства $C(X)$. Доказать, что если $f, g \in A$, то $|f|, \max(f, g), \min(f, g) \in \overline{A}$.

<u>Задача 27.</u> а) Пусть X — компакт, A — подалгебра $C(X)$, разделяющая точки, то есть такая, что для любой пары точек $x, y \in X$ найдется функция $f \in A$, удовлетворяющая условию $f(x) \neq f(y)$. Доказать, что $\overline{A} = C(X)$.

б) Доказать, что любую непрерывную функцию на отрезке можно сколь угодно хорошо равномерно приблизить многочленом.

в) Доказать, что любую 2π-периодическую функцию на $\mathbb{R}$ можно сколь угодно хорошо равномерно приблизить тригонометрическим многочленом.

<u>Задача 28.</u> Какие функции на $\mathbb{R}$ могут быть сколь угодно хорошо равномерно приближены многочленами?

<u>Задача 29.</u> Доказать, что формула $\varphi_p(f) = \left(\int\limits_a^b |f(x)|^p\,dx\right)^{1/p}$ при $p \geqslant 1$ определяет норму на пространстве $C([a, b])$ непрерывных функций на отрезке $[a, b]$.

<u>Задача 30.</u> При любом действительном $p \geqslant 1$ нормированное пространство $(C([a, b]), \varphi_p)$ неполно, то есть неполно соответствующее ему метрическое пространство $(C([a, b]), \rho_p)$.

<u>Задача 31.</u> Доказать, что из всякой фундаментальной последовательности в нормированном пространстве $(C([a, b]), \varphi_p)$ можно выделить подпоследовательность, поточечно сходящуюся на дополнении к некоторому множеству меры нуль.

Линейная алгебра VIII
Инвариантные подпространства

Листок 21д
ноябрь

Определение 1. Линейное подпространство $V \subset L$ называется *инвариантным* относительно оператора $A \in \operatorname{End}(L)$ (A-*инвариантным*), если $A(V) \subset V$.

Задача 1. Найти все подпространства пространства $\mathbb{R}^2$, инвариантные относительно операторов, заданных следующими матрицами:
а) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \operatorname{ch}\alpha & \operatorname{sh}\alpha \\ \operatorname{sh}\alpha & \operatorname{ch}\alpha \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$; г) $\begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$.

Задача 2. Верно ли, что а) сумма; б) пересечение инвариантных подпространств инвариантны?

Задача 3. Доказать, что $\ker A$ и $\operatorname{im} A$ инвариантны относительно A.

Определение 2. Число λ называется *собственным значением* (или *собственным числом*) оператора $A \in \operatorname{End}(L)$, если подпространство $E_\lambda = \{v \in L \mid Av = \lambda v\}$ ненулевое. В этом случае E_λ называется *собственным подпространством*, отвечающим собственному значению λ, а ненулевые векторы из E_λ — *собственными векторами*.

Задача 4. Найти все собственные значения и собственные векторы операторов задачи 1.

Задача 5. Верно ли, что подпространство $L_1 \subset L$ лежит в некотором собственном подпространстве $L' \subset L$ тогда и только тогда, когда инвариантно всякое подпространство $L_2 \subset L_1$?

Определение 3. Пусть L — линейное пространство над полем F, $A \in \operatorname{End}(L)$. Ненулевой многочлен $p \in F[x]$ называется *аннулирующим* оператор A, если $p(A)$ — нулевой оператор.

Задача 6. Среди многочленов, аннулирующих оператор A, найдется многочлен, на который делятся все остальные. Этот многочлен называется *минимальным аннулирующим многочленом* оператора A.

Задача 7. У любого оператора на конечномерном пространстве есть минимальный аннулирующий многочлен. Верно ли это в бесконечномерном случае?

Задача 8. Найти минимальные аннулирующие многочлены операторов задачи 1.

Задача 9. Пусть p — минимальный аннулирующий многочлен оператора A. Доказать, что множество корней p совпадает с множеством собственных значений A.

Определение 4. Пусть A — оператор на конечномерном пространстве. Многочлен $\chi_A(\lambda) = \det(A - \lambda E)$ называется *характеристическим многочленом* оператора A.

Задача 10. Выразить второй и последний коэффициенты характеристического многочлена χ_A через элементы матрицы оператора A.

Задача 11. Верно ли, что множество корней характеристического многочлена χ_A совпадает с множеством собственных значений A?

Определение 5. Оператор $A \in \operatorname{End}(L)$ называется *диагонализуемым*, если у L есть базис, состоящий из собственных векторов оператора A.

Задача 12. Оператор на n-мерном пространстве, характеристический многочлен которого имеет n различных корней, диагонализуем.

Задача 13*. Пусть $A, B \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$. Доказать, что характеристические многочлены операторов AB и BA совпадают.

Задача 14*. Какой может быть размерность такого подпространства V пространства $\operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ ($n \leqslant 4$), что $\det A \neq 0$ для любого ненулевого $A \in V$?

Задача 15. Всякий оператор $A \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ имеет в некотором базисе матрицу верхнетреугольного вида ($a_i^j = 0$ при $i < j$).

Задача 16. Оператор $A \in \operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ диагонализуем тогда и только тогда, когда для любого A-инвариантного подпространства L_1 найдется такое A-инвариантное подпространство L_2, что $L_1 \oplus L_2 = \mathbb{C}^n$.

Задача 17. Пусть даны k попарно коммутирующих операторов в $\mathbb{C}^n$. Всегда ли

а) найдется вектор, собственный для каждого из этих операторов;

б) найдется базис, в котором матрицы всех этих операторов верхнетреугольны;

в) среди этих операторов не больше n линейно независимых?

Задача 18. Если характеристический многочлен оператора $A \in \operatorname{End}(\mathbb{R}^n)$ не имеет кратных комплексных корней, то $\mathbb{R}^n$ раскладывается в прямую сумму одномерных и двумерных A-инвариантных подпространств.

Задача 19. Для любого оператора A на конечномерном пространстве найдется такое k, что $\ker A^k = \ker A^{k+1}$, $\operatorname{im} A^k = \operatorname{im} A^{k+1}$.

Определение 6. *Корневым подпространством* линейного оператора $A\in\operatorname{End}(L)$, отвечающим собственному значению λ, называется множество $\{v\in L\,|\,\exists k\ (A-\lambda E)^k v=0\}$.

Задача 20. Найти собственные числа, собственные векторы, корневые подпространства следующих операторов на $C^\infty(\mathbb{R})$:
а) $f\mapsto f'$; б)* $f\mapsto f''$.

Задача 21. Пусть A — оператор на конечномерном пространстве L. Тогда для любого λ найдется такое k, что $\ker(A-\lambda E)^k\oplus\operatorname{im}(A-\lambda E)^k=L$ и ограничение оператора $A-\lambda E$ на $\operatorname{im}(A-\lambda E)^k$ обратимо.

Задача 22. Пусть характеристический многочлен оператора $A\in\in\operatorname{End}(L)$ разлагается на линейные множители. Доказать, что L раскладывается в прямую сумму корневых подпространств оператора A.

Задача 23. Пусть пространство L конечномерно и корневое подпространство оператора $A\in\operatorname{End}(L)$, отвечающее собственному значению λ, совпадает с L. Пусть векторы $v_1,\ldots,v_n\in L$ представляют базис пространства $L/\operatorname{im}(A-\lambda E)$. Доказать, что
а) линейная оболочка векторов вида $(A-\lambda E)^k v_i$ $(k\geqslant 0)$ совпадает с L;
б) векторы $v_1,\ldots,v_n\in L$ можно выбрать таким образом, что ненулевые векторы вида $(A-\lambda E)^k v_i$ $(k\geqslant 0)$ будут линейно независимы.

Задача 24. *Жордановой клеткой* называется матрица вида

$$\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 0 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 & 0\\ 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 & 0\\ \multicolumn{6}{c}{\dotfill}\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda & 1\\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \lambda\end{pmatrix}.$$

Доказать, что матрица всякого оператора $A\in\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$ в некотором базисе имеет блочно-диагональный вид, причем каждый блок является жордановой клеткой. Такая матрица называется *жордановой нормальной формой* оператора A. Доказать, что она определена однозначно с точностью до перестановки блоков.

Задача 25. Сформулировать и доказать аналогичное утверждение для операторов на $\mathbb{R}^n$.

Задача 26. Пусть известна жорданова нормальная форма оператора $A\in\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$. Найти его минимальный аннулирующий многочлен.

Задача 27. Привести к жордановой нормальной форме операторы, заданные следующими матрицами:

а) $\begin{pmatrix}1 & -3 & 4\\ 4 & -7 & 8\\ 6 & -7 & 7\end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 1 & -7\\ 9 & -3 & -7 & -1\\ 0 & 0 & 4 & -8\\ 0 & 0 & 2 & -4\end{pmatrix}$.

Задача 28. Найти матрицу $f(A)$, где A — жорданова клетка, f — многочлен.

Задача 29. Вычислить

а) $\begin{pmatrix}1 & -4\\ -4 & 8\end{pmatrix}^{100}$; б) $\begin{pmatrix}1 & 1\\ -1 & 3\end{pmatrix}^{100}$; в) $\begin{pmatrix}0 & 4\\ -1 & 4\end{pmatrix}^{100}$.

Задача 30*. Характеристический многочлен является аннулирующим.

Задача 31*. Описать все возможные жордановы нормальные формы оператора $A\in\operatorname{End}(\mathbb{C}^n)$, для которого найдется такой вектор $v\in\mathbb{C}^n$, что линейная оболочка векторов вида $A^k v$ $(k\geqslant 0)$ совпадает с $\mathbb{C}^n$.

Задача 32. Найти такую последовательность (x_n), удовлетворяющую условию $x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}+cx_{n-2}$, что
а) $a=0$, $b=7$, $c=6$, $x_1=1$, $x_2=5$, $x_3=3$;
б) $a=4$, $b=-1$, $c=4$, $x_1=9$, $x_2=4$, $x_3=8$;
в) $a=6$, $b=-12$, $c=8$, $x_1=2$, $x_2=4$, $x_3=0$.

Задача 33. Найти такую последовательность (x_n), что $x_{n+1}=3x_n+10x_{n-1}+1$, $x_1=x_2=0$.

Задача 34*. Найти все такие последовательности (x_n), что $x_{n+1}=\pi x_n+\cos n$.

Задача 35*. Пусть $A\in\operatorname{End}(\mathbb{R}^5)$ — оператор, заданный следующей матрицей:

$$\begin{pmatrix}83 & -16 & 33 & 75 & -13\\ 90 & -46 & 51 & -21 & 44\\ 45 & 61 & -77 & 30 & \pi\\ 28 & -32 & 27 & 89 & -56\\ 27 & 39 & 70 & 94 & -33\end{pmatrix}.$$

Доказать, что для всякой ограниченной последовательности векторов (u_n) найдется такая неограниченная последовательность векторов (v_n), что $v_{n+1}=Av_n+u_n$.

<u>Задача 36*.</u> Пусть $A\in\mathrm{End}(\mathbb{R}^3)$ — оператор, заданный матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3+2a \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 2-3a & 1 \end{pmatrix},$$

где $a\in\mathbb{R}$, и пусть $u_n=(e^{\sin(\pi n/37)}, e^{\sin(\pi n/43)}, e^{\sin(\pi n/47)})$. При каких значениях a найдется такая а) неограниченная; б) ограниченная последовательность векторов (v_n), что $v_{n+1}=Av_n+u_n$?

Многомерный анализ

Листок 22д
март

<u>Определение 1.</u> Пусть U — некоторое открытое подмножество пространства $\mathbb{R}^n=\{(x_1,\dots,x_n)\}$. *Частной производной* (первого порядка) функции $f\colon U\to\mathbb{R}$ по координате x_i называется функция $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ $(=\frac{\partial}{\partial x_i}f)$, заданная формулой

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(y_1,\dots,y_n)=\lim_{t\to 0}\frac{f(y_1,\dots,y_i+t,\dots,y_n)-f(y_1,\dots,y_i,\dots,y_n)}{t}.$$

Функция f называется *гладкой*, если у нее существуют и непрерывны на U производные любого порядка $\frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1}\dots\partial x_{i_k}}$. Пространство гладких функций на U обозначается $C^\infty(U)$.

<u>Задача 1.</u> Доказать, что гладкие функции непрерывны.

<u>Задача 2.</u> Какие из следующих функций на $\mathbb{R}^2=\{(x,y)\}$ являются гладкими?

а) $P(x,y)$, где P — многочлен; б) $e^{x^2+y^2}$; в) $|x|^\alpha+|y|^\beta$, $\alpha,\beta>0$;

г) $f(x,y)=\begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2+y^2}}, & (x,y)\neq(0,0); \\ 0, & (x,y)=(0,0). \end{cases}$

<u>Задача 3.</u> Доказать, что если все первые частные производные функции $f\colon U\to\mathbb{R}$ равны нулю и U связно, то f постоянна.

<u>Задача 4.</u> Доказать, что если гладкая функция f имеет в точке x локальный экстремум, то все первые частные производные f в точке x равны нулю.

<u>Задача 5.</u> Доказать, что $\frac{\partial^2 f}{\partial x_i\partial x_j}=\frac{\partial^2 f}{\partial x_j\partial x_i}$ для всякой гладкой функции f.

<u>Задача 6*.</u> Пусть f — гладкая функция, заданная в окрестности точки $x=(x_1,\dots,x_n)$. Доказать, что при любом натуральном k существует ровно один такой многочлен p степени k от n переменных, что $\lim_{y\to x}\frac{f(y)-p(y)}{|x-y|^k}=0$.

<u>Задача 7.</u> Нарисовать множество точек на плоскости, удовлетворяющих условию $f(x,y)=C$. (Это множество называется *множеством* (*линией*) *уровня* функции f.)

а) $x^2+xy+2y^2$, $c=-1,0,1$; б) $x^2+xy-2y^2$, $c=-1,0,1$;
в) x^3+y^2, $c=-1,0,1$; г) x^3-3x-y^2, $c=-3,-2,-1,1,2,3$.

Определение 2. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$ — отрытое подмножество. Отображение $F\colon U \to \mathbb{R}^k$ (и отображение $F\colon U \to F(U)$) называется *гладким*, если $F = (f_1, \ldots, f_k)$, где $f_1, \ldots, f_k \in C^\infty(U)$.

Задача 8. Верно ли, что

а) композиция гладких отображений есть гладкое отображение;

б) если существует отображение, обратное к гладкому, то оно гладко?

Определение 3. Гладкое отображение $F\colon U \to V$ называется *диффеоморфизмом*, если существует и гладко отображение, обратное к F. Отображение F называется *локальным диффеоморфизмом* в точке $x \in U$, если ограничение F на некоторое открытое множество $U_0 \subset U$, содержащее x, задает диффеоморфизм из U_0 в $F(U_0)$.

Задача 9. Являются ли следующие отображения диффеоморфизмами:

а) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y, x + y^2)$;

б) $F\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $(x, y) \mapsto \left(\dfrac{x}{x^2+y^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2}\right)$;

в) $F\colon \mathbb{R}^2 \backslash \{0\} \to \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$, $(x, y) \mapsto (xy, 2x^2 - y^2)$;

г) $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (y + \varepsilon \sin y, \cos y + x)$;

д)* $F\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto (x + y^2 + xy + e^x, x + y + y^3 + e^y)$?

Задача 10. Множества U и V называются *диффеоморфными*, если существует диффеоморфизм, переводящий U в V. Доказать, что

а) внутренности квадрата, круга и полукруга попарно диффеоморфны;

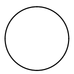
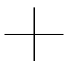
б)* множества, полученные из $\mathbb{R}^n$ выбрасыванием k различных точек, попарно диффеоморфны;

в)* открытые выпуклые множества в $\mathbb{R}^n$ попарно диффеоморфны;

г)* $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ не диффеоморфны при $n \neq m$.

Определение 4. (*Гладким*) *путем* будем называть гладкое отображение $I\colon [a, b] \to \mathbb{R}^n$. Если $a < 0 < b$, то назовем точку $I(0)$ *центром* пути.

Задача 11. Может ли образ пути в $\mathbb{R}^2$ выглядеть следующим образом:

а) ; б) ; в)  ?

Определение 5. Пути I_1, I_2 с центром в точке x называются *эквивалентными*, если $I_1(t) - I_2(t) = o(t)$ при $t \to 0$.

Задача 12. Ввести на классах эквивалентности путей с центром в точке $x \in U$ структуру линейного пространства. Это пространство называется *касательным пространством* к U в точке x и обозначается $T_x U$.

Задача 13. Доказать, что при гладком отображении $F\colon U \to V$ эквивалентные пути с центром в точке x переходят ($I \rightsquigarrow F \circ I$) в эквивалентные пути с центром в точке $F(x)$ и соответствующее отображение касательных пространств является линейным. Это отображение называется *производной* (*дифференциалом*) отображения F в точке x и обозначается $dF|_x$.

Определение 6. Пусть $I\colon [a, b] \to U$ — путь, представляющий вектор $v \in T_x U$. *Производной* функции f *вдоль вектора* v называется число $\dfrac{d}{dt} f(I(t))|_{t=0}$, обозначаемое $L_v f$.

Задача 14. Доказать корректность определения 6.

Задача 15. Доказать, что для всякого $v \in T_x U$ найдутся такие числа $a_1, \ldots, a_n$, что $L_v f = \left(a_1 \dfrac{\partial f}{\partial x_1} + \ldots + a_n \dfrac{\partial f}{\partial x_n}\right)\Big|_x$. Вектор v записывается следующим образом: $v = a_1 \dfrac{\partial}{\partial x_1} + \ldots + a_n \dfrac{\partial}{\partial x_n}$. Доказать, что $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$ — базис в $T_x U$.

Задача 16. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n = \{(x_1, \ldots, x_n)\}$, $V \subset \mathbb{R}^m = \{(y_1, \ldots, y_m)\}$, $F\colon U \to V$ — гладкое отображение. Найти матрицу отображения $dF|_x$ в базисах $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)$, $\left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}, \ldots, \dfrac{\partial}{\partial y_m}\right)$.

Задача 17. а) Доказать, что следующие два утверждения эквивалентны.

(1) (*Теорема об обратной функции*) Если Φ — гладкое отображение и $d\Phi|_x$ — изоморфизм, то Φ — локальный диффеоморфизм в точке x.

(2) (*Теорема о неявной функции*) Пусть $x \in U \subset \mathbb{R}^n$, $y \in V \subset \mathbb{R}^m$, $F\colon U \times V \to \mathbb{R}^n$ — такое гладкое отображение, что ограничение отображения $dF|_{(x,y)}$ на подпространство $T_y V \subset T_{(x,y)} U \times V$ является изоморфизмом. Тогда найдется открытое множество $U_1 \subset U$, содержащее точку x и (единственное при данном U_1) гладкое отображение $\varphi_1\colon U_1 \to V$, такое что $\varphi_1(x) = y$ и $F(z, \varphi_1(z)) = F(x, y)$ при всех $z \in U_1$.

б)* Доказать одно из этих утверждений.

Определение 7. Множество $M \subset \mathbb{R}^n$ называется *подмногообразием* размерности k, если для любой точки $x \in M$ найдется такой диффеоморфизм F между открытым множеством $U \subset \mathbb{R}^n$, содержащим точку x, и открытым множеством $V \subset \mathbb{R}^n$, содержащим точку 0, что $F(M \cap U) = \mathbb{R}^k \cap V$, где $\mathbb{R}^k$ — k-мерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$.

Задача 18*. Пусть $U \subset \mathbb{R}^n$, $F: U \to \mathbb{R}^k$ — гладкое отображение. Если $\operatorname{rk} dF|_x = k$ для всех $x \in F^{-1}(y)$, то $F^{-1}(y)$ является $(n-k)$-мерным подмногообразием.

Задача 19. Являются ли следующие множества подмногообразиями:
а) $\{(x, y) \mid x = y^2\}$; б) $\{(x, y) \mid ax^2 + by^2 = c\}$; в) $\{(x, y) \mid x^2 = y^3\}$;
г) $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$; д)* $\{(x, y) \mid x^{17}y - y^9x = 1\}$;
е) поверхность в $\mathbb{R}^3$, полученная вращением вдоль оси z окружности с центром в точке $(2, 0, 0)$, которая лежит в плоскости $\{y = 0\}$ и имеет радиус 1;
ж)* $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, 4x^2 + y^2 + z^2 = c\}$;
з)* $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, x^2 + y^3 + z^5 = 1\}$?

Комментарии к дополнительным листкам

Листок 1д. Подстановки, ч. 1

Первый дополнительный листок посвящен подстановкам. Задачи из него позволяют ознакомиться, в самом первом приближении, с тем, как устроены группы (слово «группа», конечно, не употребляется). Вершина листка — задачи, связанные с понятием четности подстановки, самая трудная из них — задача 15. Четность подстановки в дальнейшем появляется в курсе линейной алгебры, это — формально единственная связь листков о подстановках с остальным курсом. Листок пользуется наибольшей популярностью из всех дополнительных, отчасти оттого, что он первый, отчасти из-за элементарности содержания.

Листком занимался 21 школьник, и практически все ученики решили все задачи листка.

Листок 2д. Мощности множеств

Задачи 3, 7а), 9 — классические теоремы теории множеств, листок построен вокруг них. Само определение мощности выглядит очень абстрактным, но главную психологическую сложность вызывает использование знаков неравенства в непривычном смысле — многим кажется, что если $|A| > |B|$ и $|B| > |C|$, то уж, конечно, $|A| > |C|$. Так оно и есть, но доказательство все же требуется. Задача 10 дает возможность обсудить с теми, кто ее решил, аксиому выбора. Как правило, ее, не зная, используют в решении. Так получается проще, но можно обойтись и без аксиомы выбора.

Листком начали заниматься 20 школьников, 15 из них решили его полностью, пятеро — больше половины задач.

Листок 3д. Подстановки, ч. 2

Второй листок о подстановках более разнороден, чем первый. Первая из его тем — разложение на непересекающиеся циклы, задачи 1—8 в основном об этом. Отметим, что уже первая задача обычно вызывает сложности при решении, что для нашего курса необычно. Вторая тема листка — гомоморфизмы групп подстановок. Понятие гомоморфизма дает первый из многих пример того, как выделяется класс отображений, сохраняющих некоторую структуру (в данном случае структуру умножения). В ходе решения задач школьники открывают свойства гомоморфизмов, остающиеся верными и в контексте общей теории гомоморфизмов групп. Некоторые из задач достаточно сложны. Экстремальный пример — задача 20, дать для нее аккуратное и не очень длинное решение (доказательство) математика пока не умеет.

17 школьников начали работать с листком. 16 решили все или почти все задачи без звездочек, один сделал половину листка.

Листок 4д. Числа Каталана и числа Фибоначчи

Это «развлекательный» листок, тематически связанный с листком «Комбинаторика». Задачи в нем в основном простые, а те, что посложнее, имеют «олимпиадный» характер. Никакая общая идея их не объединяет.

19 школьников начали решать задачи листка и успешно справились с ним, решив все задачи без звездочек. Трое школьников решили задачу 3, 13 — задачу 11.

Листок 5д. Введение в теорию полей

Листок большой и рассчитанный на решение в течение долгого времени. Он открывается задачей 1, в которой объясняется, как построить поле из p элементов (для тех, кто не справился с соответствующей задачей из листка 6). Даже исключая существование обратного элемента, проверка аксиом для этого поля (например аксиомы дистрибутивности) — трудоемкое дело. В действительности, проще пользоваться классами эквивалентности, а не их представителями (остатками), но убедить в этом школьников непросто.

Доказательство существования обратного требует хорошего знакомства с алгоритмом Евклида или (более сложной в доказательстве) основной теоремой арифметики. Появляется повод обсудить эти темы. Далее следуют стандартные определения и иллюстрирующие их задачи. Среди прочего определяется поле $\mathbb{C}$, доказывается единственность поля $\mathbb{R}$.

Отметим задачу 2в), которая может служить отправным пунктом для многих дополнительных задач. Основным методом построения новых полей служит, в силу легкости определения, присоединение квадратного корня из элемента. Цикл задач, связанных с квадратичными расширениями, завершается задачей 23. Далее идут задачи «на вырост» — более сложные, причем такие, что решать их без знания основ линейной алгебры хотя и можно, но несподручно. Задача 26 очень сложная. Хотя ее редко кто решает до конца, вполне реально добиться какого-то продвижения на пути к решению.

16 школьников взялись за задачи листка. Два школьника решили его полностью, решили все или почти все задачи без звездочек 12 учеников. С задачей 26 справились два школьника.

Листок 6д. Линейная алгебра I. Линейные пространства

Этот листок открывает цикл, посвященный линейной алгебре. Главные принцип цикла: все, что можно определить без координат, определяется без координат. В частности, то, что не требует конечномерности, определяется без предположения конечномерности.

В листке дается определение линейного пространства. Как и в случае с полем, важно понимание того, что линейное пространство — это некоторый набор, состоящий из линейного пространства как множества, поля и операций сложения и умножения. Задача 1 дает набор примеров (и антипримеров) линейных пространств. Он может варьироваться в зависимости от того, до какого места дошел основной курс к моменту выдачи листка: например, включать или не включать непрерывные (разрывные) функции. Задачи в основном легкие и сводятся к манипуляциям с аксиомами. Для развития понимания важно задавать вопросы вроде следующего: «Как устроены подпространства пространства $\mathbb{R}^2$ ($\mathbb{R}^3$)?». В листок эта задача не включена потому, что ее формулировка несколько расплывчата и требует дополнительного обсуждения.

20 школьников решили все задачи листка без звездочек.

Листок 7д. Линейная алгебра II. Линейные отображения

В листке даются определения линейного отображения, ядра, образа, изоморфизма. Из обозначений вызывает трудности (общепринятое) использование Ax вместо $A(x)$. Затем, не всем легко понять, например, формулы из задачи 1д) — $(Ap)(x)$, что это такое? Задача 3 вызывает еще большие проблемы неразвернутостью формулировки: действительно, о какой такой дистрибутивности идет речь? Некоторые школьники не могут придумать ни одной, но на самом деле их две — правая и левая, если не считать той, что встречается в задаче 2. Понятие отношения эквивалентности, упоминаемое в задаче 9, не было, строго говоря, нигде определено. Говоря чуть менее строго, можно считать определением его использование в задаче 1 листка «Мощности множеств». Определение факторпространства можно было дать и раньше, в первом листке. Но без отображения факторизации (задача 13) большого смысла в нем нет. Полной свободы в обращении с факторпространствами добиться пока не удастся, но полезно рассмотреть примеры. Например, можно изучить факторпространства $\mathbb{R}^2$ по всевозможным подпространствам с рисованием картинок (элементы факторпространства здесь являются подмножествами плоскости). Ну и наконец-то можно предложить содержательно не очень простую задачу по линейной алгебре — задачу 10.

Те же 20 школьников, решившие листок 6д, полностью справились с задачами этого листка.

Листок 8д. Линейная алгебра III. Базис, размерность

Задачи здесь посложнее, чем в предыдущих листках по линейной алгебре, но вполне посильны. Решаются они не быстро, но без особых затруднений. Непростым дополнительным вопросом (не слишком содержательным) оказывается «Есть ли базис у нулевого пространства?». Из-за того, что базис не обязательно конечен, он оказывается неупорядоченным. В дальнейшем это требует корректировки (в листке «Двойственное пространство»). Отметим, что в задаче 23 пространство не обязательно конечномерно.

15 учеников решили все задачи листка.

Листок 9д. Канторово множество и некоторые его свойства

Листок построен вокруг примера канторова множества. Многие школьники, рассуждая о замкнутых множествах, пытаются утверждать (по аналогии с задачей об открытых множествах из листка «Открытые и замкнутые множества»), что всякое замкнутое множество есть объединение не более чем счетного числа непересекающихся точек, отрезков, лучей. Канторово множество своим существованием опровергает такое упрощенное представление.

17 школьников решили все или почти все задачи листка.

Листок 10д. Линейная алгебра IV. Двойственное пространство

Содержательно сложных задач в листке нет. В задаче 2а) многим трудно прочитать формулу, она требует внимательного разбора. То же относится и к определению 4. Задача 8а) — первая, где предлагается доказать корректность определения без пояснений. Тем, кто не понял, что требуется, нужно это объяснить, но цель, конечно, заключается в том, чтобы школьники сами научились развертывать формулировку. Задача 8б) вызывает схожие сложности с пониманием условия, оно к тому же и выглядит пугающе. Коммутативная диаграмма упомянута скорее в шутку (но все же пусть учатся не пугаться таких слов). Одна из основных идей листка — что в конечномерном случае дважды двойственное пространство можно отождествить с исходным — так сразу не усваивается. Остается ждать и надеяться.

13 школьников начали работать с листком, они же решили все задачи листка.

Листок 11д. Метрические пространства

Обсуждаются простейшие примеры и свойства метрических (и нормированных) пространств. Листок открывает топологический цикл, включающий также «Непрерывные отображения» и «Полноту и компактность». Впрочем, топологическая направленность в нем достаточно условна: изометричность — понятие геометрическое, задачу 14б) (весьма сложную) можно отнести и к алгебре.

12 школьников решили почти все задачи листка, трое — половину задач. С задачей 6г) справились два школьника, с задачей 14б) — трое.

Листок 12д. Основная теорема алгебры

Точнее было бы назвать этот листок «Алгебраические расширения полей». Изучаются алгебраические расширения, симметрические многочлены, доказательство Даламбера основной теоремы алгебры, алгебраическое замыкание. Трудный и трудоемкий листок. Позволяет взглянуть более системно на задачи из «Введения в теорию полей».

Только 5 школьников рискнули заняться этой темой. Двое из них решили все задачи листка, 3 — половину или несколько меньше.

Листок 13д. Средние величины и классические неравенства

Классические неравенства, классическая тема. Знание производной может помочь. Школьники достаточно охотно решают задачи из этого листка. Не все из нас уверены в том, что он уместен в нашем курсе.

Все школьники, начавшие работать с этим листком, успешно закончили его, решив все задачи. Таковых школьников оказалось 13.

Листок 14д. Линейная алгебра V. Матрицы

Матрица — это прежде всего матрица линейного отображения, а уж потом таблица чисел. Операциям над матрицами (и системам линейных уравнений) дается интерпретация в терминах линейной алгебры. Завершается листок процедурой обращения матрицы. Отдельное внимание уделяется визуализации линейных преобразований. Задачу 11 предлагается решать с помощью компьютера; обсуждение полученных картинок может привести, например, к однопараметрическим группам преобразований плоскости.

11 школьников решили 22 из 23 задач листка. Двое решили 20 задач.

Листок 15д. Непрерывные отображения

Понятие непрерывной функции расширяется в этом листке до понятия непрерывного отображения метрических пространств. Поскольку ку тема отчасти уже знакома, ее усвоение не вызывает затруднений. К тому же некоторые утверждения более естественно формулируются именно в этом контексте (например, «прообраз замкнутого множества при непрерывном отображении замкнут»). Новым является понятие гомеоморфизма. Определение топологической эквивалентности метрик дает возможность обсудить определение топологического пространства (но особенно углубляться в эту тему не стоит). После обсуждения связности и линейной связности идет классификационная задача 21. Она не столь сложна, сколь трудоемка, требует некоторой изобретательности и умения путем группировки схожих подзадач представить рассуждения в обозримом виде.

5 школьников решили весь листок (21 задачу), один — 18 задач, трое — 15, один — 9.

Листок 16д. Приближение действительных чисел рациональными

Развиваемая теория позволяет, в частности, привести пример трансцендентного числа. Формулировки некоторых задач заимствованы из книги В. И. Арнольда «Математические методы классической механики».

Трудный листок. Только один школьник занялся этой темой. Но он решил все задачи листка.

Листок 17д. Линейная алгебра VI. Тензорные формы

Основная цель листка — изложение теории внешних форм (в перспективе ведущих к дифференциальным) и определителя. Заодно обсуждаются тензорные формы вообще и симметрические в частности. Эти объекты не слишком наглядны, многие задачи трудоемки. Все это делает листок непростым. В задаче 2 верхние индексы, как правило, не имеют смысла показателя степени, здесь может понадобиться пояснение (хуже того, в пунктах в, д индексы и степени перемешиваются). Сложностей в определении 10 (и, тем самым, в задаче 14) можно было бы избежать, ограничившись нулевой характеристикой, но мы отказались от такого компромисса. Понять геометрический смысл определителя непосредственно из определения 12 невозможно, он требует отдельного разъяснения и обсуждения. Впрочем, и формула, выражающая определитель через коэффициенты матрицы (задача 23) в этом отношении ничуть не лучше. Отметим содержательную классификационную задачу 19, лежащую в стороне от основного направления.

10 школьников решили почти все задачи листка, один — половину.

Листок 18д. Интегрирование. Критерий Лебега

Здесь выясняется, какие именно функции интегрируемы по Риману. Ключевым фактом является компактность отрезка (задача 3). С ней многие имели дело и раньше (отметим, что задача 5 повторяет задачу 16д) из листка «Канторово множество»); в любом случае, листок несложный.

17 учеников из 20, оставшихся к этому времени в классе, успешно решили все задачи листка.

Листок 19д. Линейная алгебра VII. Свойства определителя

Определитель здесь используется в обращении матриц и решении систем линейных уравнений. Далее идет небольшой набор разнородных упражнений на вычисление определителя.

8 школьников начали и успешно закончили листок, решив все его задачи.

Листок 20д. Полнота и компактность

Листок открывается темой полноты, среди задач чуть в стороне здесь стоит теорема о сжимающем отображении (задача 8). Затем определяется конструкция пополнения (отметим, что $[(x_n)]$ в определении 5 обозначает класс эквивалентности последовательности (x_n)). Многочисленные ее приложения, такие, например, как построение действительных (и p-адических) чисел из рациональных, остаются за пределами листка, но подразумеваются в качестве возможных тем для обсуждения. Далее достаточно исчерпывающе разрабатывается тема компактности. Она сменяется темой равномерного приближения функций. Приближение функций на отрезке многочленами — лишь первое из возможных приложений теории. Наконец, последние три задачи подводят к (отсутствующему в листке) определению пространства L_p.

3 школьника решили почти все задачи листка, двое — примерно половину.

Листок 21д. Линейная алгебра VIII. Инвариантные подпространства

Изучаются инвариантные, собственные, корневые подпространства. В определении 3 может понадобиться пояснение о том, что такое $p(A)$, в задаче 21 — о том, что такое ограничение оператора. Пространства, как всегда, не предполагаются конечномерными без необходимости; задача 20 — не совсем по алгебре. Задачи в конце листка связаны с теорией (дискретных) линейных динамических систем.

5 школьников решили почти все задачи листка, двое — половину.

Листок 22д. Многомерный анализ

Здесь изучаются (бесконечно) гладкие функции на многомерных пространствах и гладкие отображения многомерных пространств. Определения используются стандартные, с частными производными. Задача 6 — это, в сущности, формула Тейлора (с остаточным членом в форме Пеано). Задача 10 относится скорее к дифференциальной топологии. Затем формулируется «инвариантное» определение производной (тут мы обращаемся к линейной алгебре), оно сравнивается с «координатным» в задаче 16. В задаче 17 сформулированы стандартные теоремы об обратной и неявной функции. Мы не разъясняем в листке подходов к их доказательству, хотя необходимые инструменты уже имеются. Нам кажется более важным добиться по возможности лучшего понимании формулировки. Далее идет определение подмногообразия в $\mathbb{R}^n$ (до определения многообразия остается один шаг) и формулируется теорема о том, что прообраз регулярного значения гладкой функции есть подмногообразие (задача 18). Хотя нам кажется, что это утверждение является более фундаментальным и более геометрически наглядным, чем теорема о неявной функции (которая легко из него выводится), мы все же сохраняем классическую последовательность изложения.

Двое школьников начали работать над этим листком в конце 11-го класса.

Давидович Борис Мозесович
Пушкарь Петр Евгеньевич
Чеканов Юрий Витальевич

Математический анализ в 57-й школе
Четырехгодичный курс

Издательство Московского центра
непрерывного математического образования
119002, Москва, Большой Власьевский пер., 11. Тел. (495) 241-74-83

Подписано в печать 15.12.2007 г. Формат 60×90 1/16. Бумага офсетная.
Печать офсетная. Печ. л. 11. Тираж 3000. Заказ .

- Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. Математика. Учебник для 3 класса начальной школы. 2007
- Гейдман Б. П., Мишарина И. Э., Зверева Е. А. Математика. Учебник для 4 класса начальной школы. 2007
- Гейдман Б. П., Мишарина И. Э. Математика. 1 класс. Методические рекомендации по работе с комплектом учебников. 2007
- Гейдман Б. П., Мишарина И. Э. Математика. 2 класс. Методические рекомендации по работе с комплектом учебников. 2007
- Гейдман Б. П., Мишарина И. Э. Математика. 3 класс. Методические рекомендации по работе с комплектом учебников. 2005
- Гейдман Б. П., Мишарина И. Э. Математика. 4 класс. Методические рекомендации по работе с комплектом учебников. 2006

Серия «Математическая мозаика» (издательство «Мир»)

- Белов В. Н. Фантасмагория с головоломками. 2002
- Гарднер М. Математические головоломки и развлечения. 1999
- Гарднер М. Математические досуги. 2000
- Гарднер М. Математические новеллы. 2000
- Дьюдени Г. Э. 520 головоломок. 2000
- Кэрролл Л. История с узелками. 2000
- Тригг Ч. Задачи с изюминкой. 2000
- Шарыгин И. Ф. Математический винегрет. 2002

Получить более подробную информацию об этих и других книгах издательства МЦНМО, а также заказать их можно через Интернет на сайте `http://www.mccme.ru/publications/`.

Книги можно купить в магазине «Математическая книга» в здании Московского центра непрерывного математического образования.

Адрес магазина: 119002, Москва, Бол. Власьевский пер., 11. Проезд до станции метро «Смоленская» или «Кропоткинская», далее пешком. Телефон для справок: (495) 241–72–85. E-mail: `biblio@mccme.ru`.

Магазин работает ежедневно кроме воскресенья с $11^{\underline{30}}$ до $20^{\underline{00}}$.